



Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Departamento de Matemática Aplicada

Elementos de Teoria dos Grafos

Notas de Aula

Socorro Rangel, Valeriano A. de Oliveira, Silvio A. Araujo
24 de setembro de 2018

Preparado a partir do texto:
Rangel, Socorro. Teoria do Grafos, Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O que é um Grafo?	1
1.2	O que é um Digrafo?	1
1.3	Aplicações	3
1.3.1	O problema das pontes de Königsberg	3
1.3.2	O Problema de ligações de eletricidade, gás e água	4
1.3.3	O problema do caixeiro viajante	4
2	Conceitos Iniciais	7
3	Isomorfismo	15
4	Caminhos e Circuitos	21
4.1	Subgrafos	21
4.2	Trajetos, Caminhos e Circuitos	22
5	Grafos Conexos	29
6	Operações com grafos	33
7	Grafos Direcionados (Digrafos)	39
7.1	Introdução	39
7.2	Representação e Conceitos Iniciais	39
7.3	Tipos de Digrafos	42
7.4	Caminhos Orientados e Conexidade	43
8	Grafos e Algoritmos	51
9	Representação de Grafos	57
9.1	Matriz de Adjacência	57

9.2	Matriz de Incidência	62
9.3	Lista de Arestas	65
9.4	Lista de Sucessores	65
10	Caminho Mínimo em Grafos	71
10.1	Ideia do Algoritmo de Dijkstra	73
10.2	Implementação	76
10.3	Algoritmo de Dijkstra	77
11	Grafos Eulerianos	87
11.1	Algoritmo de Decomposição (Hierholzer, 1873)	90
11.2	Algoritmo de Fleury (Fleury, 1883)	91
11.3	Digrafos Eulerianos	92
11.4	O Problema do Carteiro Chinês	94
11.4.1	Algoritmo (Gibbons, 1985)	95
12	Grafos Hamiltonianos	101
12.1	O Problema do Caixeiro Viajante	108
12.2	Digrafos Hamiltonianos	109
13	Árvores	117
13.1	Propriedades de Árvores	119
13.2	Raízes e Árvores Binárias	120
13.3	Procedimentos de Busca em Árvores	124
13.4	Centro de um Grafo	124
13.5	Árvores Geradoras	128
13.6	Árvore Geradora Mínima	136
14	Conjuntos de Corte e Conectividade	143
14.1	Conjuntos de Corte	143
14.2	Conectividade	147
14.3	Teorema de Menger	152
15	O Problema do Fluxo Máximo	159
15.1	O Teorema do Fluxo Máximo – Corte Mínimo	164
15.2	O Algoritmo de Ford e Fulkerson	169
16	Grafos Planares	173

17 Coloração de Vértices	193
17.1 Partição Cromática	200
17.2 Polinômios Cromáticos	210
18 Coloração de Arestas	221
18.1 Cobertura de Arestas	221
18.2 Coloração de Arestas	223
19 Emparelhamentos	237
19.1 Emparelhamentos em Grafos Bipartidos	239
19.2 Teorema Min-Max	249
19.3 Conjuntos Independentes e Coberturas	251
20 Decomposições de Arestas	257
20.1 Decomposição em Emparelhamentos	258
20.2 Decomposição em Subgrafos Planares	260
20.3 Decomposição em Subgrafos Geradores	263
20.4 Decomposição em Árvores Geradoras	266

Capítulo 1

Introdução

1.1 O que é um Grafo?

Um grafo G é constituído de um conjunto V não-vazio cujos elementos são chamados de vértices (ou nós), e um conjunto A de pares não ordenados de elementos de V , chamados de arestas. Denotamos o grafo por $G(V, A)$ ou simplesmente G , e $V(G)$ e $A(G)$ são respectivamente o conjunto de vértices e de arestas.

Exemplo 1.1.

- a) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e
 $A = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_1, v_2), (v_2, v_2)\}$.
- b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (1, 3)\}$.
- c) $V = \{a, b, c\}$ e $A = \{ \}$.

Os grafos podem ser representados através de um diagrama onde os vértices são representados por pontos e cada aresta é representada por uma linha ligando os pares de vértices que a definem. A representação gráfica dos grafos dados no Exemplo 1.1 é exibida na Figura 1.1.

Em algumas aplicações, as arestas são definidas como pares ordenados de vértices. Neste caso dizemos que o grafo é orientado ou direcionado e o chamamos de *Digrafo*.

1.2 O que é um Digrafo?

Um grafo orientado (ou direcionado) $G(V, A)$ é constituído por um conjunto V não-vazio cujos elementos são chamados vértices (ou nós), e uma família

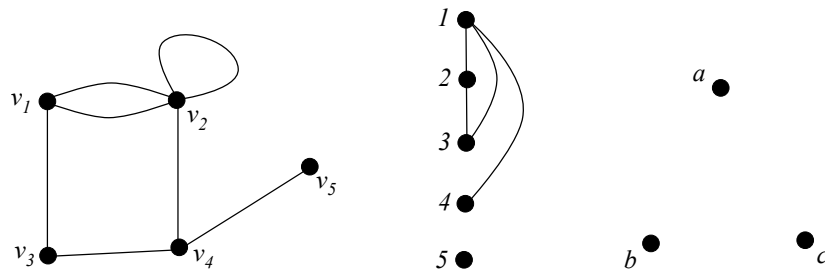


Figura 1.1: Representação Gráfica dos grafos do Exemplo 1.1

A de pares ordenados de elementos de V , chamados de arestas (ou arcos).

Os digrafos podem ser desenhados através de um diagrama onde os vértices são representados por pontos e cada aresta (v_i, v_j) é representada por uma linha ligando v_i a v_j com uma seta apontando para v_j .

Exemplo 1.2. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $A = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_1, v_2)\}$.

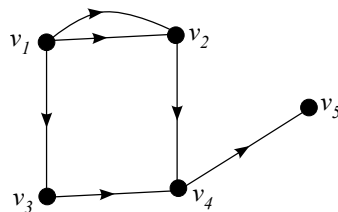


Figura 1.2: Representação Gráfica do digrafo do Exemplo 1.2

Um mesmo grafo, ou um mesmo digrafo, pode ter diferentes representações gráficas. Ver Figura 1.2.

O que é que caracteriza um grafo? O conjunto de vértices e a família de arestas, ou seja, um conjunto de objetos (vértices) e a relação entre estes objetos (arestas). Durante o curso, a distinção entre grafos e digrafos será feita de acordo com o tópico estudado.

Assim, podemos dizer que a Teoria de Grafos é um ramo da matemática que estuda as relações entre os elementos de um determinado conjunto.

Objetivos do texto:

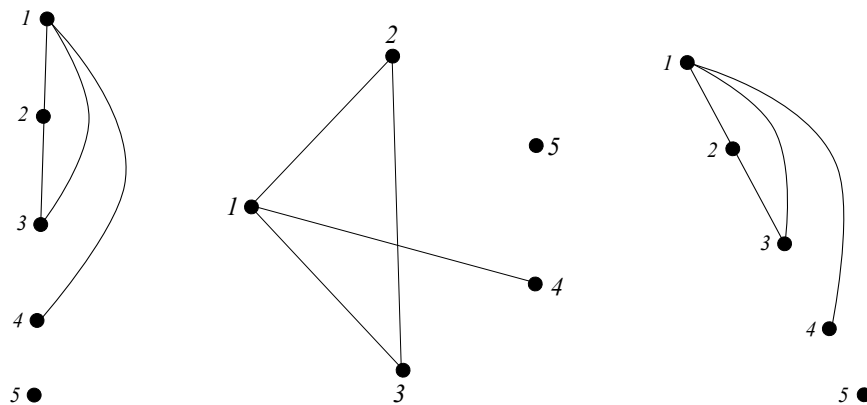


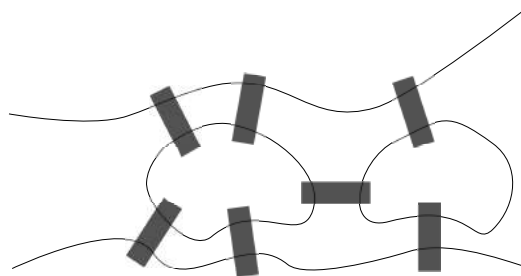
Figura 1.3: Um mesmo grafo com diferentes representações gráficas.

- Desenvolver a Teoria dos Grafos;
- Modelar problemas de forma a serem resolvidos utilizando conceitos e resultados de Teoria dos Grafos.

1.3 Aplicações

1.3.1 O problema das pontes de Königsberg

Na cidade de Königsberg (Hoje Kaliningrado - Rússia) sete pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre uma ilha e o continente conforme a figura abaixo:



Será que é possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar e passando por cada uma das pontes apenas uma vez?

Problema do Carteiro Chinês : Determinar a rota de menor custo que

saia da agência central dos correios, passe por todas as ruas de um determinado bairro, e volte a origem.

1.3.2 O Problema de ligações de eletricidade, gás e água

Considerem que existam 3 casas e que cada uma delas precisa ser ligada ao sistema de eletricidade, gás e água. Por questões de segurança, deseja-se saber se é possível fazer as ligações sem que haja cruzamento das tubulações. Represente este problema através de um grafo.

1.3.3 O problema do caixeiro viajante

Um viajante necessita visitar um certo número de cidades. É possível determinar um roteiro de viagem tal que cada cidade seja visitada apenas uma vez?

Considere, por exemplo, um trecho do mapa rodoviário que inclui a cidade de São José do Rio Preto (SJRP). Suponha que o viajante tenha que sair de SJRP e visitar as cidades de Marília, Araçatuba, Bauru e São Carlos. Represente este problema através de um grafo.

É possível encontrar uma rota que passe por todas as cidades apenas uma vez e retorne a cidade SJRP? Caso existam mais de uma rota, qual é a rota que minimiza a distância total viajada?



Exercícios

1. Considere o problema 1.3.2. Desenhe grafos representando as seguintes situações:
 - (a) 2 casas e 3 serviços;
 - (b) 4 casas e 4 serviços (água, eletricidade, gás e telefone).
2. Descreva 10 situações (jogos, atividades, problemas, etc.) que podem ser representadas através de grafos ou digrafos. Explique o que os vértices e as arestas estão representando. Sugestão de leitura: Capítulo 1, seção 1.3 de [1] e Capítulos 3 e 5 de [25].
3. O Problema da decantação - Considere três vasos, A, B, e C com capacidades de 8, 5 e 3 litros respectivamente. O vaso A está cheio e os vasos B e C estão vazios. Divida o líquido que está no vaso A em duas quantidades iguais. Represente o problema usando um grafo.

Capítulo 2

Conceitos Iniciais

Definição 2.1. Seja $G(V, A)$ um grafo. Dada uma aresta $a = (v_i, v_j) \in A$, dizemos que:

- a) v_i e v_j são os **extremos** da aresta a ;
- b) a aresta a é dita ser **incidente** nos vértices v_i e v_j ;
- c) v_i e v_j são chamados de **vértices adjacentes**;
- d) se $v_i = v_j$ a aresta a é chamada de **loop**;
- e) se existir uma aresta $f = (v_k, v_l)$ tal que $v_k = v_i$ e $v_j = v_l$, as arestas a e f são chamadas de **arestas paralelas**. Grafos que contêm arestas paralelas são chamados de *Multi-grafos*.

Exercício. Analise o grafo G da Figura 2.1 e exiba exemplos dos termos citados na Definição 2.1.

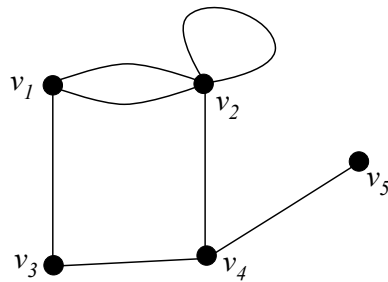


Figura 2.1: Grafo G

Definição 2.2. Um grafo é **simples** se não possui loops e/ou arestas paralelas.

Definição 2.3. Duas arestas são ditas **adjacentes** se elas incidem no mesmo vértice.

Definição 2.4. O **grau** de um vértice v , $d(v)$, em um grafo G sem loops é determinado pelo número de arestas incidentes em v . Caso haja loops, estas arestas contribuem com grau 2. Representamos por $\delta(G)$ o valor do grau do vértice de menor grau do grafo G , e por $\Delta(G)$ o maior grau.

Exemplo 2.5. Determine os graus dos vértices do grafo dado na Figura 2.1 acima.

Definição 2.6. A **sequência de graus** de um grafo G é a sequência não-decrescente formada pelos graus dos vértices de G .

Exemplo 2.7. A sequência de graus do grafo dado na Figura 2.1 acima é $(1, 2, 3, 3, 5)$.

Definição 2.8. Dizemos que:

- a) Um vértice v é **isolado** se $d(v) = 0$.
- b) Um vértice v é **pendente** se $d(v) = 1$.
- c) Um grafo $G(V, A)$ é dito **nulo** se o conjunto de arestas A é vazio. É representado por N_n , onde n é o número de vértices do grafo.
- d) Um grafo $G(V, A)$ é dito **regular** se todos os seus vértices tem o mesmo grau.
- e) Um grafo $G(V, A)$ é dito **completo** se existe uma aresta entre cada par vértices. É representado por K_n , onde n é o número de vértices do grafo.
- f) Um grafo $G(V, A)$ em que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$ é dito ser um **caminho**. É representado por P_n .
- g) Um grafo $G(V, A)$ em que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$ é dito ser um **ciclo**. É representado por C_n .

- h) Um grafo $G(V, A)$ é dito **valorado** (ou **rede**) se são atribuídos valores para os vértices e/ou arestas.
- i) Um grafo $G(V, A)$ em que $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, e para toda aresta $(v, w) \in A$ tem-se $v \in V_1$ e $w \in V_2$ é dito ser um **grafo bipartido**.
- j) Um grafo bipartido $G(V_1 \cup V_2, A)$ é dito ser **bipartido completo** se $(v, w) \in A$ para todos $v \in V_1$ e $w \in V_2$. É representado por $K_{p,q}$, onde p é o número de vértices de V_1 e q é o número de vértices de V_2 .
- k) Dado um grafo G , o seu complemento, representado por \bar{G} , é o grafo tal que $V(\bar{G}) = V(G)$ e $A(\bar{G}) = A(K_n) \setminus A(G)$, onde n é o número de vértices de G .

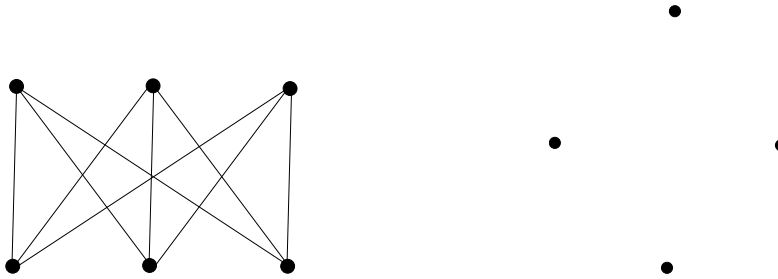


Figura 2.2: Grafos regular e nulo.

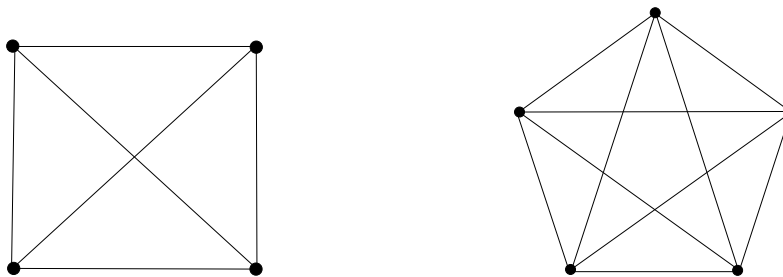
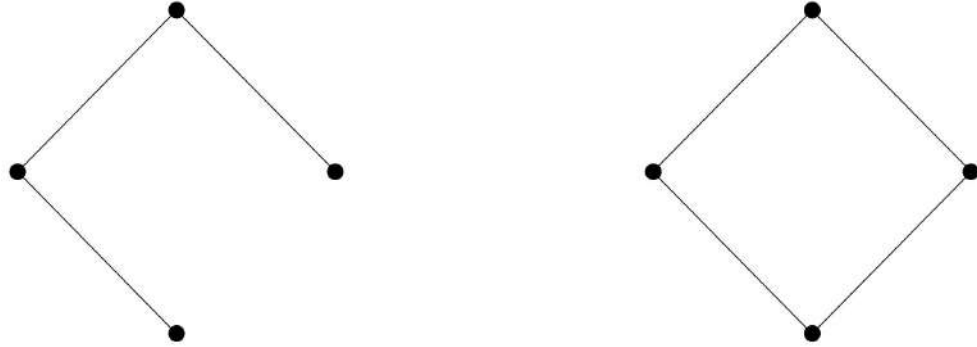


Figura 2.3: Grafos completos K_4 e K_5 .

Figura 2.4: Grafos P_3 e C_4 .Figura 2.5: Grafos bipartido e bipartido completo $K_{2,3}$.

Proposição 2.9. *Dado um grafo G com n vértices, v_1, v_2, \dots, v_n e m arestas, temos que:*

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m. \quad (2.1)$$

Porque este resultado é válido? Observe que cada aresta contribui com 2 graus na soma dos graus de todos os vértices, ou seja, cada aresta é contada duas vezes. Assim, a soma é igual a duas vezes o número de arestas.

Teorema 2.10. *O número de vértices de grau ímpar em um grafo é sempre par.*

Demonstração. Vamos dividir a soma em (2.1) em duas parcelas. Os vértices com grau par e os vértices com grau ímpar:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{\text{grau par}} d(v_i) + \sum_{\text{grau ímpar}} d(v_i). \quad (2.2)$$

O lado esquerdo da equação (2.2) é par (pela Proposição 2.9). A primeira parcela do lado direito também é par, pois é a soma de números

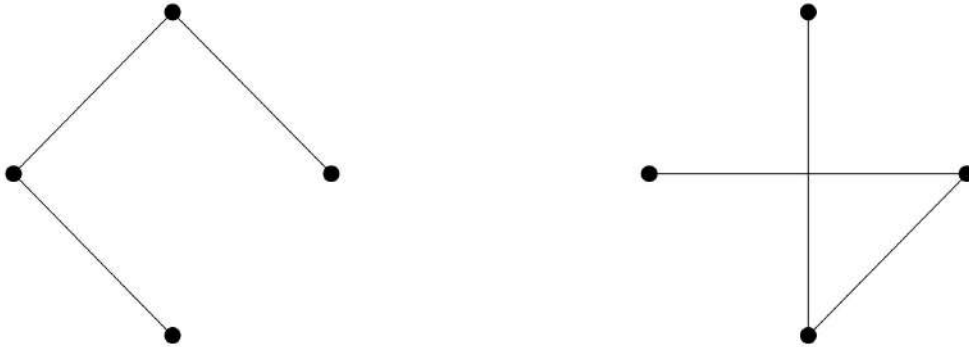


Figura 2.6: Um grafo G e seu complemento \bar{G} .

pares. Para que a igualdade seja válida, a segunda parcela em (2.2) também deve ser par:

$$\sum_{\text{grau ímpar}} d(v_i) \text{ é par.} \quad (2.3)$$

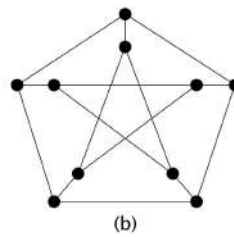
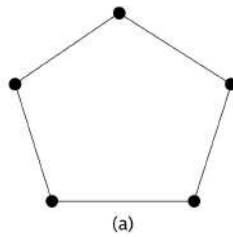
Como cada parcela $d(v_i)$ em (2.3) é ímpar temos que ter um número par de elementos para que a soma seja um número par (lembre-se que um número ímpar é da forma $(2k + 1)$). \square

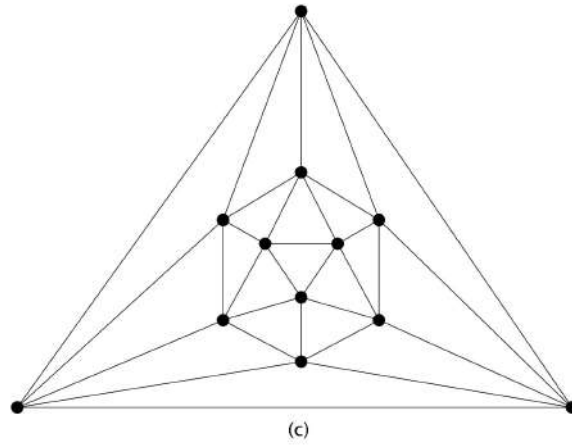
Exercícios:

Alguns exercícios e as respectivas figuras foram selecionados do livro “Graphs - An Introductory Approach - R.J. Wilson e J.J. Watkins” (vide ref. [26]).

- Desenhe todos os grafos simples com 1, 2, 3 e 4 vértices.
- Represente os seguintes compostos orgânicos através de grafos:
 - CH_4 ; (b) C_2H_2 ; (c) N_2O_3 .
- Faça a representação gráfica dos seguintes grafos $G(V, A)$:
 - $V = \{\square, \circ, \diamond, \triangle\}$, $A = \{(\square, \circ), (\circ, \diamond), (\circ, \triangle), (\diamond, \triangle)\}$.
 - $V = \{A, B, C, D\}$, $A = \{ \}$.
 - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 4), (3, 5), (6, 7), (6, 8), (7, 8)\}$.

4. Esboce grafos G_1 , G_2 , G_3 e G_4 , cada um com 5 vértices e 8 arestas, satisfazendo as seguintes condições:
- G_1 é um grafo simples;
 - G_2 é um grafo não-simples sem laços;
 - G_3 é um grafo não-simples sem arestas múltiplas;
 - G_4 é um grafo não-simples contendo tanto laços quanto arestas simples.
5. Convença a você mesmo que o grau máximo de um vértice em um grafo simples com n vértices é $n - 1$.
6. (a) Seja G um grafo com 4 vértices e com a sequência de graus $(1, 2, 3, 4)$. Dê o número de arestas de G e construa um grafo com tais características.
- (b) Existe algum grafo simples com 4 vértices e com sequência de graus $(1, 2, 3, 4)$?
7. Uma consequência do “lema do aperto de mãos” (a soma dos graus dos vértices coincide com o dobro do número de arestas) é que se G é um grafo regular de grau r com n vértices, então G têm exatamente $nr/2$ arestas. Verifique tal consequência para cada um dos seguintes grafos regulares:





8. Esboce os seguintes grafos: (a) K_8 ; (b) N_8 ; (c) C_8 ; (d) P_8 ; (e) $K_{4,4}$; (f) $\bar{K}_{3,3}$; (g) $\bar{K}_{1,5}$.

9. Complete as seguintes afirmações:

- (a) o grafo $K_{r,s}$ é um grafo regular somente quando
- (b) o grafo $\bar{K}_{r,s}$ é a união de e
- (c) se G é um grafo simples com n vértices e é regular com grau r , então \bar{G} é regular de grau ...;
- (d) se G é um grafo simples com n vértices e m arestas, então \bar{G} possui ... vértices e ... arestas.

Capítulo 3

Isomorfismo

Nós já vimos que é possível representar um mesmo grafo de várias maneiras. Como determinar se dois grafos são equivalentes, ou seja, se possuem as mesmas propriedades? Isto é, como determinar se dois grafos são isomorfos? A palavra isomorfismo vem do grego *iso* (mesmo) e *morfo* (mesma forma).

Definição 3.1. Dizemos que dois grafos G e H são **isomorfos** se existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de G e os vértices de H que preserve a relação de adjacência entre vértices e arestas. Em outras palavras, é possível obter o grafo H a partir de uma nova rotulação dos vértices de G .

Exemplo 3.2. Considere os grafos da Figura 3.1. Construir a correspondência biunívoca.

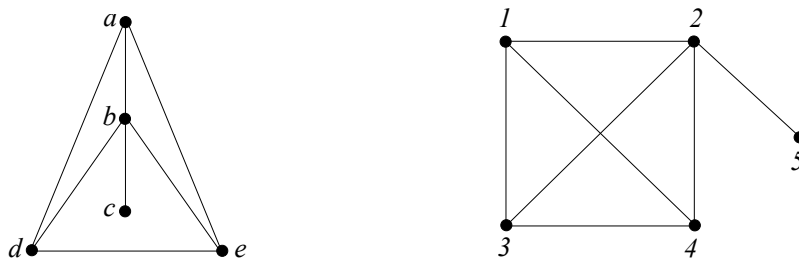


Figura 3.1: Grafos isomorfos

Aplicações: O estudo de isomorfismo pode ser aplicado na descoberta de novos compostos orgânicos. Os químicos mantêm uma tabela de

compostos orgânicos. Cada vez que um novo composto é descoberto é necessário determinar se ele é isomorfo a algum composto já existente.

Determinar se dois grafos são isomorfos não é uma tarefa muito simples. De fato, a determinação de isomorfismos é uma área de intensa pesquisa em teoria de grafos. Condições necessárias para que dois grafos sejam isomorfos são facilmente determinadas através da Definição 3.1:

Proposição 3.3. *Condições necessárias para Isomorfismos entre os dois grafos G e H :*

1. G e H devem possuir o mesmo número de vértices;
2. G e H devem possuir o mesmo número de arestas;
3. G e H devem possuir o mesmo número de vértices com um determinado grau.

As condições 1, 2 e 3 elencadas na Proposição 3.3 são suficientes para garantir o isomorfismo entre dois grafos? Vamos responder a esta questão analisando os dois grafos exibidos na Figura 3.2.

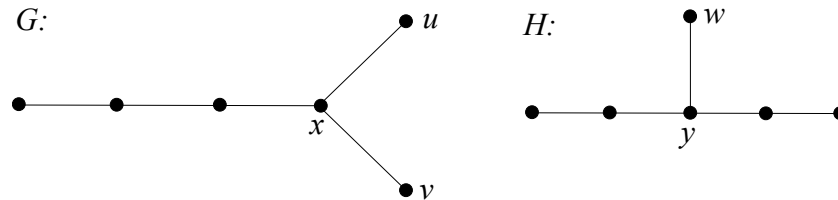


Figura 3.2: Grafos não isomorfos

Observe que G e H :

- a) possuem mesmo número de vértices;
- b) possuem mesmo números de arestas;
- c) possuem:
 - 3 vértices com grau 1;
 - 2 vértices com grau com grau 2;
 - 1 vértice com grau 3.

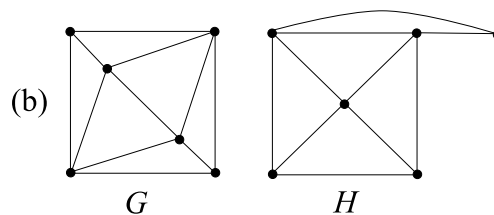
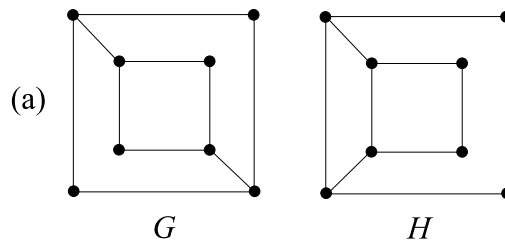
Porém estes dois grafos não são isomorfos! Não é possível fazer uma correspondência biunívoca entre os vértices que preserve a relação de adjacência entre vértices e arestas. Observe que é necessário associar o vértice x do grafo G ao vértice y do grafo H , pois não existe nenhum outro vértice com grau 3 em H . Mas o vértice y é adjacente a apenas um vértice de grau 1, enquanto que x em G é adjacente a dois vértices de grau 1. Portanto, não é possível fazer uma correspondência biunívoca entre os vértices de G e H que preserve a relação de adjacência entre vértices e arestas.

No Capítulo 11, Seção 11.7 de [N. Deo, Graph Theory with applications to engineering and computer science, 1974] é feita uma discussão a respeito de algoritmos para se determinar isomorfismos entre grafos.

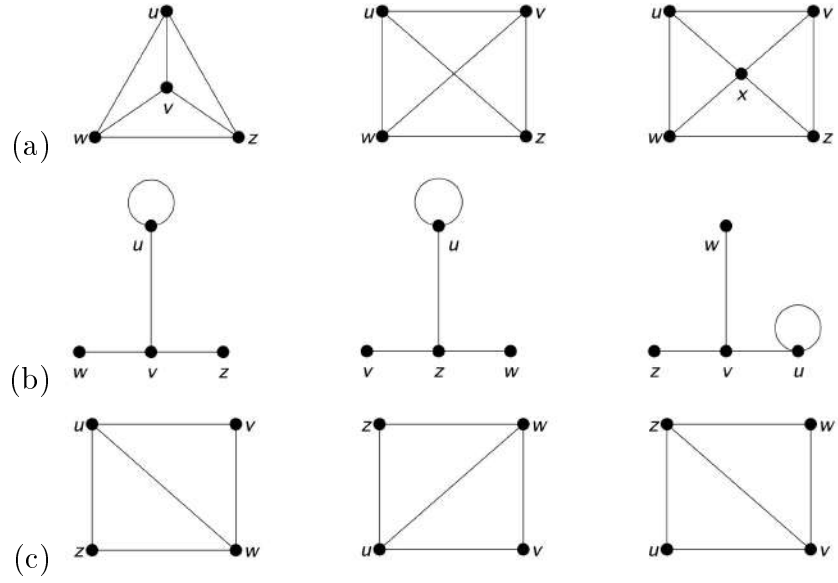
Exercícios:

Alguns exercícios e as respectivas figuras foram selecionados do livro “Graphs - An Introductory Approach - R.J. Wilson e J.J. Watkins” (vide ref. [26]).

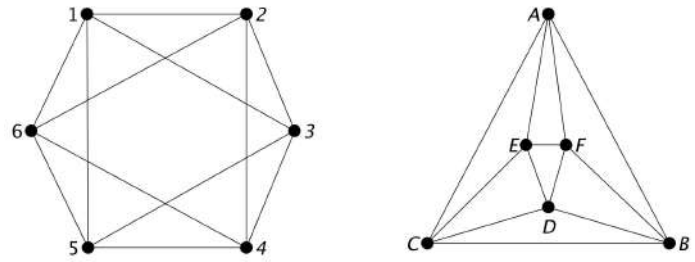
1. Desenhe todos os grafos simples, não isomorfos com 1,2, 3 e 4 vértices.
2. Verifique se os grafos abaixo são isomorfos:



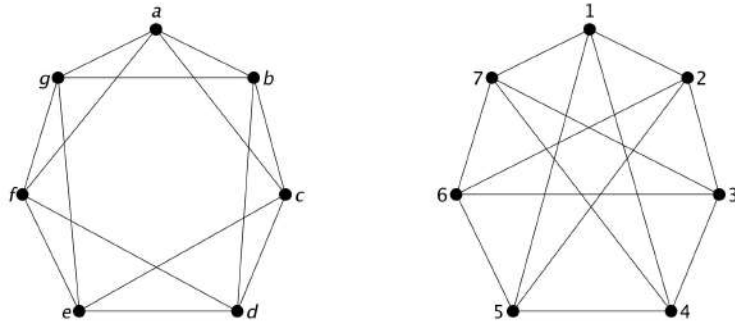
3. Em cada uma das seguintes partes, dois dos grafos são o mesmo e o terceiro é diferente. Identifique o “diferente” em cada caso.



4. Mostre que cada par de grafos abaixo são isomorfos. Dê a correspondência biunívoca entre os vértices.

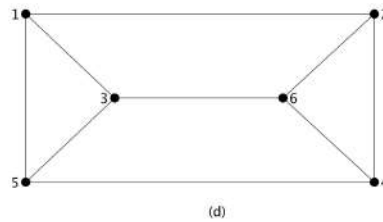
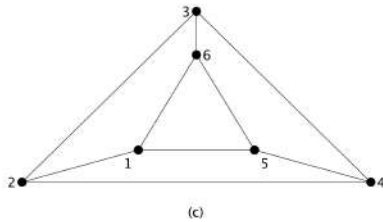
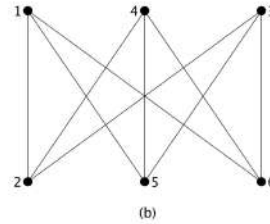
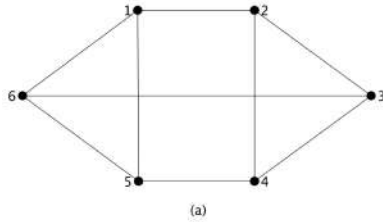


(a)

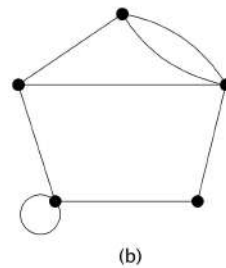
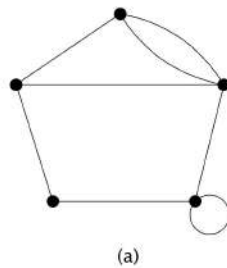


(b)

5. Dos quatro grafos a seguir, quais dois são iguais, qual é isomorfo a estes dois, e qual não é isomorfo a nenhum dos outros?



6. Mostre que os seguintes grafos não são isomorfos:



7. Classifique cada uma das seguintes informações como verdadeiras ou falsas:

- Se G e H são grafos isomorfos, então eles possuem o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas.
- Se G e H possuem o mesmo número de vértices e arestas, então eles são isomorfos.
- Se G e H são grafos isomorfos, então eles possuem a mesma sequência de graus.
- Se G e H possuem a mesma sequência de graus, então eles são isomorfos?

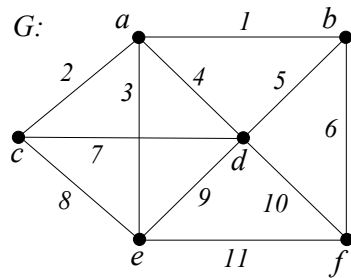
Capítulo 4

Caminhos e Circuitos

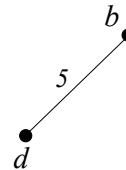
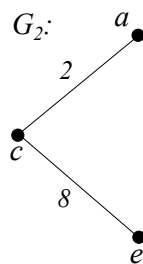
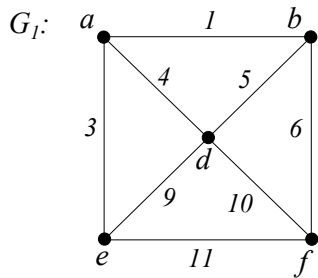
4.1 Subgrafos

Definição 4.1. Um grafo $H(V', A')$ é um **subgrafo** de um grafo $G(V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de H pertencem a G (isto é, $V' \subseteq V$, $A' \subseteq A$), e cada aresta de H possui as mesmas extremidades que em G . Denotamos um subgrafo através da mesma notação usada para conjuntos, isto é $H \subset G$.

Exemplo 4.2. Dado o grafo



os seguintes grafos são subgrafos de G :

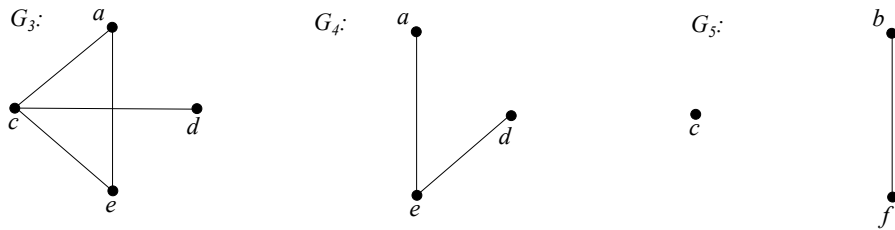


Observação 4.3. *As seguintes observações podem ser feitas:*

- *Todo grafo é um subgrafo de si próprio.*
- *Um subgrafo de um subgrafo de um grafo G também é um subgrafo de G .*
- *Um vértice de um grafo G é um subgrafo de G .*
- *Uma aresta (e os vértices aos quais ela é incidente) de um grafo G é um subgrafo de G .*

Definição 4.4. *Dois subgrafos de um grafo G , G_1 e G_2 , são **aresta-disjuntos** se eles não possuem arestas em comum. Se G_1 e G_2 não possuírem vértices em comum, os dois subgrafos são chamados de **vértice-disjuntos**.*

Exercício: Considere os grafos



Determine quais são:

- Aresta-disjuntos:
- Vértices-disjuntos:

4.2 Trajetos, Caminhos e Circuitos

Vamos discutir aqui alguns tipos especiais de subgrafos de um grafo G . Quando discutimos o problema das Pontes de Königsbergh, estávamos interessados em determinar um roteiro que passasse por todas as pontes apenas uma vez. Se estudarmos este problema através de grafos, vamos precisar de alguns conceitos para achar a solução do problema.

Definição 4.5. Dado um grafo $G(V, A)$, um **passaio** em G consiste de uma sequência finita alternada de vértices e arestas, começando e terminando por vértices, tal que cada aresta é incidente ao vértice que a precede e ao que a sucede.

Definição 4.6. Dado um grafo $G(V, A)$, um **trajeto** em G consiste de uma sequência finita alternada de vértices e arestas, começando e terminando por vértices, tal que cada aresta aparece apenas uma vez e é incidente ao vértice que a precede e ao que a sucede.

Exercício: Considere o grafo G do Exemplo 4.2. Determine:

- (i) um trajeto onde há repetição de vértice.
- (ii) um trajeto onde não há repetição de vértices.

Definição 4.7. Dado um grafo $G(V, A)$, um **caminho** em G consiste de uma sequência finita alternada de vértices e arestas, começando e terminando por vértices, tal que cada aresta é incidente ao vértice que a precede e que a sucede e não há repetição de vértices. Em outras palavras, um caminho é um trajeto onde não repetição de vértices.

Observação 4.8. Em grafos simples podemos mencionar um caminho ou trajeto listando apenas os vértices (ou arestas), sem menção explícita às arestas (ou vértices).

Exercício: Considere o grafo G do Exemplo 4.2. Identifique caminhos entre os vértices a e f .

Observação: Em grafos simples podemos mencionar um caminho ou trajeto listando apenas os vértices (ou arestas), sem menção explícita às arestas (ou vértices).

Questões:

1. Qual é o grau dos vértices pertencentes a um caminho?

Os vértices finais de um caminho possuem grau 1 e os demais, vértices intermediários, possuem grau 2.

2. Qual é o comprimento de um caminho/trajeto em grafos não valorados? E em grafos valorados?

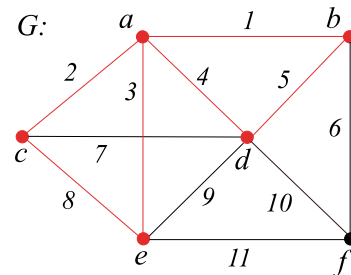
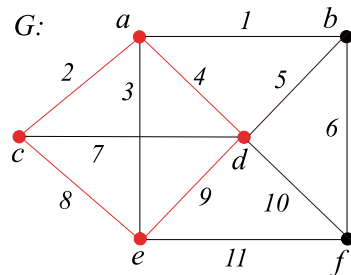
Para grafos não valorados o comprimento é igual ao número de arestas incluídas no caminho, e em grafos valorados é igual à soma dos valores das arestas.

Definição 4.9. Um trajeto no qual o vértice inicial e o final são iguais é chamado de **trajeto fechado**.

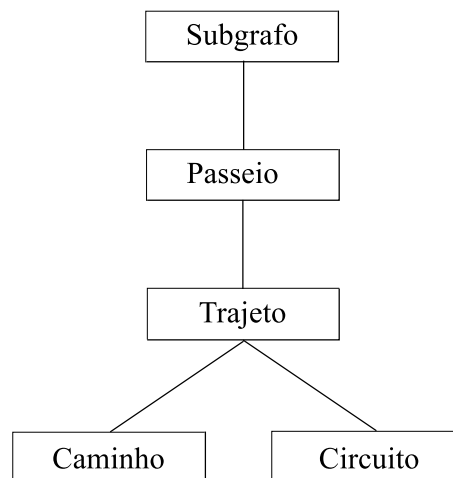
Definição 4.10. Um trajeto fechado no qual nenhum vértice (com exceção do inicial e do final) aparece mais de uma vez é chamado de **ciclo** (**circuito** ou **caminho fechado**).

Exemplo 4.11. A sequência $\{c, a, d, e, c\}$ é um exemplo de ciclo no grafo do Exemplo 4.2. Já a sequência $\{a, b, d, a, e, c, a\}$ é um contra-exemplo.

Observe neste contra-exemplo que os vértices inicial e coincidem. Qual é o 4º vértice desta sequência? Esta sequência não é um ciclo pois o 4º vértice aparece mais de vez.



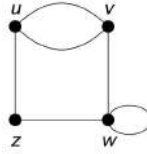
Estes conceitos podem ser resumidos através do seguinte diagrama:



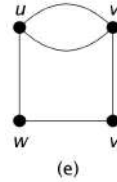
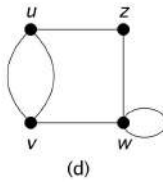
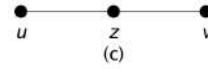
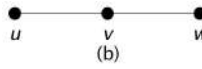
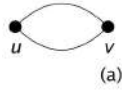
Exercícios:

Alguns exercícios foram selecionados do livro “Graphs - An Introductory Approach - R.J. Wilson e J.J Watkins” (vide ref. [26]).

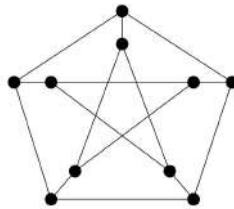
1. Seja G o seguinte grafo:



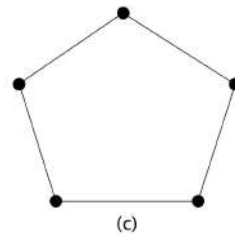
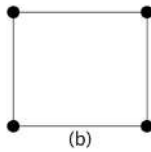
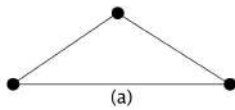
Quais dos seguintes grafos são subgrafos de G ?

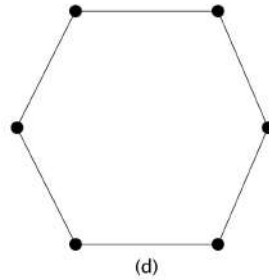


2. Seja G o seguinte grafo:

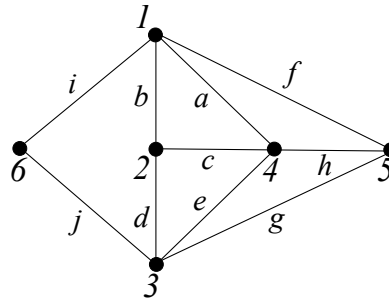


Quais dos seguintes grafos são subgrafos de G ?



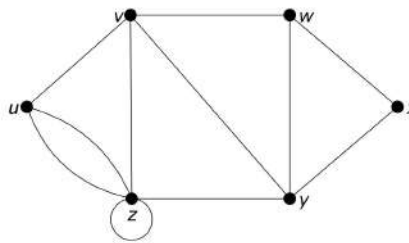


3. Considere o grafo:



- (a) Liste todos os trajetos existentes entre os vértices 5 e 6.
- (b) Liste todos os caminhos existentes entre os vértices 5 e 6.
- (c) Quais dos trajetos obtidos no item (a) são caminhos?
- (d) Dê o comprimento de cada um dos caminhos do item (b).

4. Complete as afirmações de acordo com o grafo abaixo:

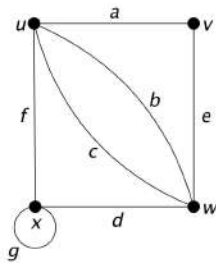


- (a) $xyzzvy$ é umde comprimento ...entre ...e ...;
- (b) $vuvzv$ é umde comprimento ...entre ...e ...;
- (c) vw é umde comprimento ...entre ...e ...;

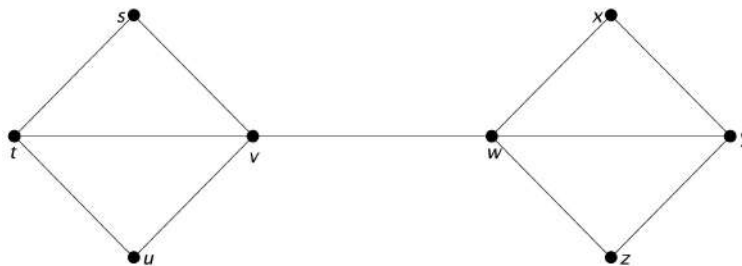
(d) $wwxyzu$ é umde comprimento ...entre...e....

5. No seguinte grafo, encontre:

- (a) um passeio de comprimento 7 entre u e v ;
- (b) circuitos de comprimento 1, 2, 3 e 4;
- (c) um caminho de comprimento máximo.

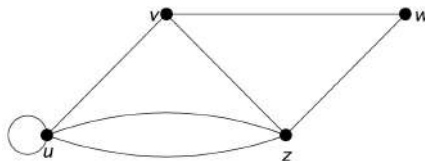


6. Encontre todos os caminhos entre s e z no grafo



7. No seguinte grafo, encontre

- (a) um passeio fechado que não seja um trajeto fechado;
- (b) um trajeto fechado que não seja um circuito;
- (c) todos os circuitos de comprimento 1, 2, 3 e 4.

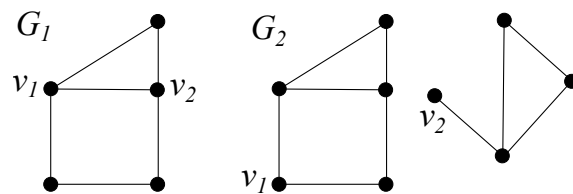


8. Sejam a , b e c três vértices distintos em um grafo. Se existe um caminho entre a e b e também existe um caminho entre b e c , mostre que existe um caminho entre a e c .
9. Mostre que em qualquer grafo bipartido todos os circuitos têm comprimento par.

Capítulo 5

Grafos Conexos

Considere os grafos abaixo:



É possível achar um caminho entre os vértices v_1 e v_2 ?

Definição 5.1. Um grafo é dito **conexo** se existir pelo menos um caminho entre cada par de vértices do grafo. Caso contrário, o grafo é chamado de desconexo.

O grafo G_1 acima é conexo, e o grafo G_2 é desconexo.

Cada um dos subgrafos conexos maximais de um grafo desconexo é chamado de uma **componente** do grafo. Ou seja, uma componente é um subgrafo conexo que não esteja estritamente contido em outros subgrafos conexos.¹

Dado um grafo qualquer, como determinar se o grafo é conexo?

Teorema 5.2. Um grafo $G(V, A)$ é desconexo se, e somente se, seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois conjuntos disjuntos e não-vazios, V_1 e V_2 , de forma que não exista uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2 .

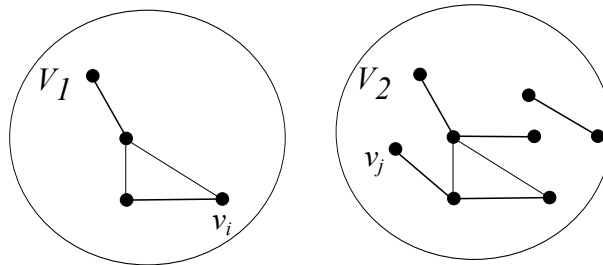
¹Sejam S e S' tais que $S' \subset S$. S' é maximal em relação a uma propriedade P quando S' satisfaz P e não existe $S'' \supset S'$ que também satisfaça P .

Demonstração. $[\Rightarrow]$ Suponhamos que G seja desconexo e mostremos que existe uma partição de V , V_1 e V_2 , tal que não existe uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2 .

Seja G um grafo desconexo. Precisamos encontrar uma partição de V que satisfaça a propriedade acima. Considere um vértice $v \in V$ qualquer. Forme o conjunto V_1 com todos os vértices de V que estejam ligados a v por um caminho. Como G é desconexo, V_1 não contém todos os vértices de G . Assim os vértices restantes formam um conjunto não-vazio V_2 , e não existe nenhuma aresta de G com uma extremidade em V_1 e outra em V_2 . Assim V_1 e V_2 formam a partição desejada.

$[\Leftarrow]$ Suponhamos que exista uma partição de V , V_1 e V_2 , tal que não existe uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2 e mostremos que G é desconexo.

Considere dois vértices arbitrários $v, w \in V$ tais que $v \in V_1$ e $w \in V_2$. Não pode existir nenhum caminho entre v e w , pois se existisse, haveria uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra em V_2 . Portanto se uma partição existe então o grafo é desconexo. \square



Questão: Qual é o número máximo de arestas que um grafo simples com n vértices pode ter?

Cada vértice pode ser ligado por uma aresta a cada um dos outros vértices do grafo, isto é, aos outros $(n - 1)$. Isto nos dá $(n - 1)$ arestas. Com existem n vértices, teremos então $n(n - 1)$ arestas. No entanto, cada aresta interliga dois vértices e portanto está sendo considerada duas vezes. Assim, para obtermos o número correto de arestas é necessário dividir o valor que temos até o momento por 2. O número máximo de arestas é então:

$$n(n - 1)/2.$$

Teorema 5.3. *Seja G um grafo simples com n vértices. Se G possui k componentes, então o número m de arestas de G satisfaz*

$$n - k \leq m \leq (n - k)(n - k + 1)/2.$$

Demonstração. Vamos provar que $m \geq n - k$ por indução sobre o número de arestas de G . É claro que o resultado é verdadeiro para um grafo nulo ($m = 0$). Suponha que a desigualdade é verdadeira para todo grafo com menos do que m_0 arestas, onde m_0 é um inteiro positivo. Vamos supor ainda, sem perda de generalidade, que G possui o menor número de arestas possível, no sentido de que a retirada de qualquer aresta de G aumenta o número de componentes em uma unidade. Neste caso, o grafo resultante teria os mesmos n vértices, $k + 1$ componentes e $m_0 - 1$ arestas. Segue da hipótese de indução que

$$m_0 - 1 \geq n - (k + 1) \Leftrightarrow m_0 \geq n - k.$$

Agora mostremos que vale a segunda desigualdade, supondo, sem perda de generalidade, que cada componente de G é um grafo completo. Suponhamos que existam dois componentes C_i e C_j com n_i e n_j vértices, respectivamente, onde $n_i \geq n_j > 1$. Se trocarmos C_i e C_j por grafos completos com $n_i + 1$ e $n_j - 1$ vértices, então o número total de vértices permanece o mesmo, e o número de arestas é alterado para

$$\frac{(n_i + 1)n_i - n_i(n_i - 1)}{2} - \frac{n_j(n_j - 1) - (n_j - 1)(n_j - 2)}{2} = n_i - n_j + 1 > 0.$$

Segue que, para que o número máximo de arestas seja atingido, G deve consistir de um grafo completo com $n - (k - 1)$ vértices e $k - 1$ vértices isolados. \square

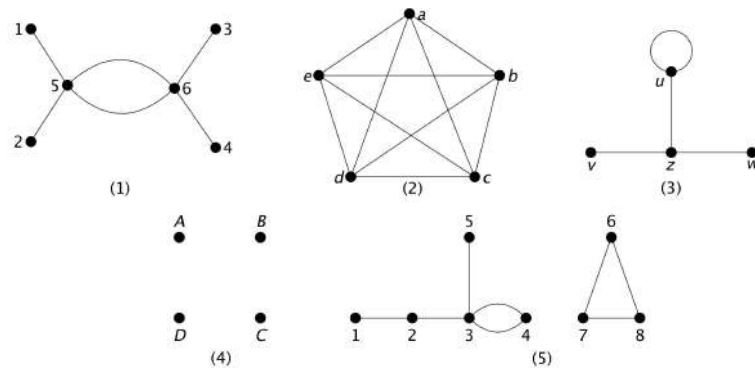
Exemplo 5.4. *Para $n = 6$ e $k = 2$:*

- (a) *Componente 1: K_4 , Componente 2: uma aresta;*
- (b) *Componente 1: K_3 , Componente 2: K_3 ;*
- (c) *Componente 1: K_5 , Componente 2: 1 vértice.*

Exercícios:

1. Considere o grafo $G(V, A)$ com $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 5), (2, 6), (1, 6), (5, 4), (3, 5), (3, 2)\}$.

- (a) Construa uma representação gráfica de G .
- (b) Determine um subgrafo desconexo de G .
- (c) Determine em G um trajeto fechado que não seja um circuito.
2. Considere um grafo simples com 7 vértices, $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ e arestas (x_i, x_j) se e somente se os inteiros i e j possuem um divisor comum diferente de 1. Dê uma representação gráfica para este grafo e determine quantas componentes este grafo possui.
3. Considere os seguintes grafos:



Quais destes grafos (a) contém arestas múltiplas? (b) contém um laço? (c) são simples? (d) são conexos?

4. Desenhe um grafo conexo que se torna desconexo quando qualquer aresta é removida.
5. Mostre que um grafo conexo $G(V, A)$ se mantém conexo após a remoção de uma aresta $a \in A$ se, e somente se, a aresta pertence a algum circuito de G .
6. Mostre que qualquer grafo simples com n vértices e mais do que $(n-1)(n-2)/2$ arestas é conexo.

Capítulo 6

Operações com grafos

Definição 6.1. A *união* de dois grafos $G_1(V_1, A_1)$ e $G_2(V_2, A_2)$ é um grafo $G_3(V_3, A_3)$ onde:

$$G_3 = G_1 \cup G_2, \quad V_3 = V_1 \cup V_2 \quad \text{e} \quad A_3 = A_1 \cup A_2.$$

Definição 6.2. A *intersecção* de dois grafos $G_1(V_1, A_1)$ e $G_2(V_2, A_2)$ é um grafo $G_3(V_3, A_3)$ onde:

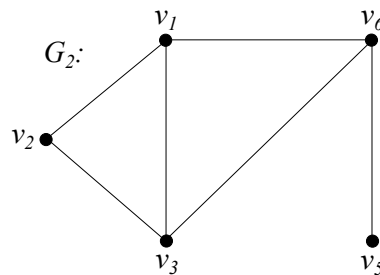
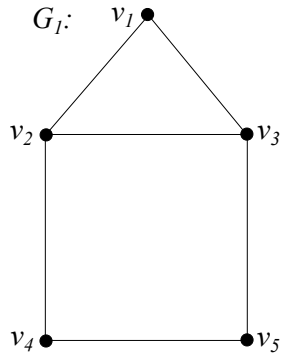
$$G_3 = G_1 \cap G_2, \quad V_3 = V_1 \cap V_2 \quad \text{e} \quad A_3 = A_1 \cap A_2.$$

Observação 6.3. Pelas definições dadas é fácil verificar que as operações de união e intersecção de grafos são comutativas, isto é:

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1,$$

$$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1.$$

Exercício. Determine a união e a intersecção dos grafos dados abaixo:

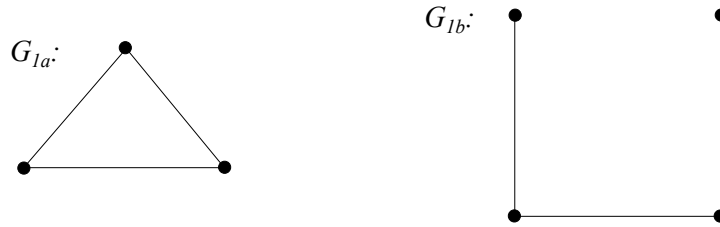


Definição 6.4. Um grafo G é dito **decomposto** em dois sub-grafos G_1 e G_2 se:

$$G_1 \cup G_2 = G \text{ e } G_1 \cap G_2 = \text{grafo nulo.}$$

Ou seja, cada aresta de G pertence a G_1 ou a G_2 . Alguns vértices no entanto podem pertencer aos dois.

Exemplo 6.5. O grafo G_1 do último exercício é decomposto nos sub-grafos G_{1a} e G_{1b} abaixo:



Definição 6.6. Se a é uma aresta de um dado grafo G , então $G - a$ é um sub-grafo de G obtido pela remoção da aresta a do grafo G .

Se v é um vértice de G , então $G - v$ é um sub-grafo de G obtido pela remoção do vértice v do grafo G . A remoção de um vértice implica na remoção das arestas a ele incidentes.

De maneira similar é possível incluir vértices e arestas em um grafo.

Definição 6.7. A **soma** de dois grafos $G_1(V_1, A_1)$ e $G_2(V_2, A_2)$ é um grafo $G_3(V_3, A_3)$ onde:

$$G_3 = G_1 + G_2, \quad V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cup A_2 \cup \{(v_i, v_j) : v_i \in V_1, v_j \in V_2\}.$$

Definição 6.8. A **soma direta** de dois grafos $G_1(V_1, A_1)$ e $G_2(V_2, A_2)$ é um grafo $G_3(V_3, A_3)$ onde:

$$G_3 = G_1 \oplus G_2, \quad V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = [A_1 \cup A_2] \setminus [A_1 \cap A_2].$$

Exemplo 6.9. A seguir estão exemplificadas algumas das operações definidas. Veja também a Figura 6.9.

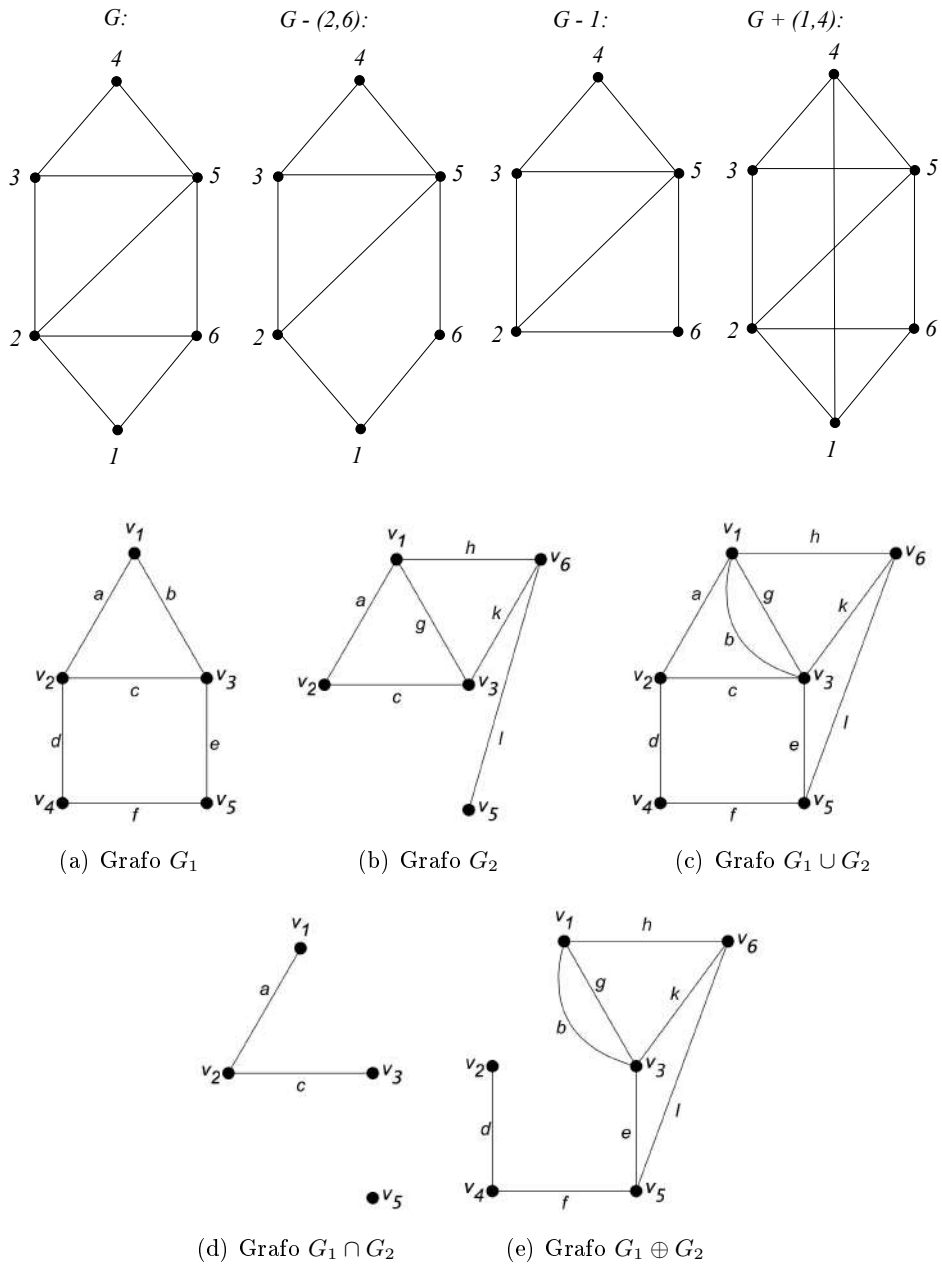


Figura 6.1: Operações com grafos

Definição 6.10. A *fusão* de um par de vértices a e b em um Grafo G é feita substituindo os dois vértices por um único vértice \overline{ab} , de tal

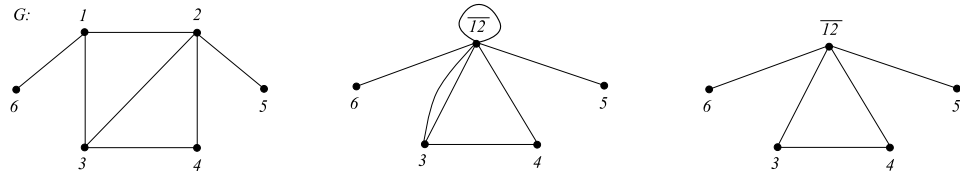
forma que toda aresta que era incidente no vértice a e/ou no vértice b passa a ser incidente no novo vértice \overline{ab} .

Observação 6.11. A fusão de vértices em um grafo não altera seu número de arestas, apenas diminui o número de vértices.

Definição 6.12. A **contração de dois vértices** a e b é feita através da fusão dos vértices a e b e a remoção dos loops e arestas paralelas que são formadas no processo.

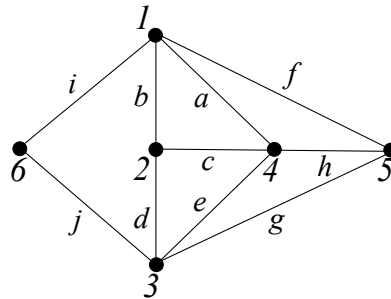
Definição 6.13. A **contração de uma aresta** (a, b) é feita removendo-se a aresta (a, b) e fazendo a fusão dos vértices a e b . É denotado por $G \setminus (a, b)$.

Exemplo 6.14. Na figura abaixo temos, à esquerda, um grafo G ; no centro, o grafo obtido após a fusão dos vértices 1 e 2; e à direita o grafo obtido após a contração da aresta $(1, 2)$.



Exercício.

Considere o grafo:



- (a) Considere os caminhos definidos no exercício anterior (tópico Sub-grafos) para este mesmo grafo. Agrupe os caminhos obtidos em conjuntos de caminhos arestas disjuntos. Mostre que a união de dois caminhos aresta-disjuntos entre dois pares de vértices forma um circuito ou é a união de circuitos.

- (b) Remova o vértice 5 deste grafo.
- (c) Acrescente a aresta $(2, 7)$.
- (d) Decomponha este grafo em três sub-grafos.
- (e) Contraia a aresta $(2, 3)$.

Capítulo 7

Grafos Direcionados (Digrafos)

7.1 Introdução

Até o momento trabalhamos com grafos tais que as arestas são pares não ordenados de vértices. Várias situações práticas requerem que associemos sentido às arestas do grafo. Por exemplo, considere um grafo representando as ruas de uma cidade. Nem todas as ruas são de mão dupla. Ao se estudar rotas de ônibus é necessário considerar se as ruas são de mão única, isto é, permitem fluxo apenas no sentido (v_i, v_j) ou se são de mão dupla. Outras situações são: fluxograma de programas computacionais onde os vértices representam instruções e as arestas a sequência de execução; redes elétricas; fluxos em redes que possuem válvulas nos encanamentos.

Quando associamos sentido às arestas do grafo temos um **grafo direcionado** ou **digrafo**. A maioria dos conceitos e terminologia usados para grafos não-orientados são também aplicáveis para digrafos. Por exemplo, o conceito de planaridade independe do sentido associado às arestas. Vamos chamar atenção neste capítulo apenas para as propriedades e conceitos que se aplicam apenas a digrafos. O conceito formal de um grafo direcionado é dado a seguir.

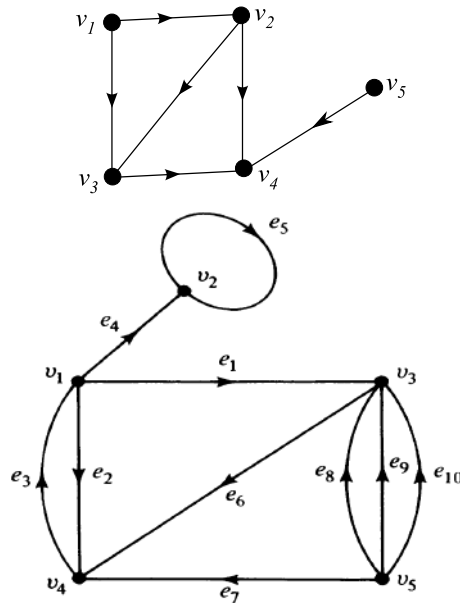
7.2 Representação e Conceitos Iniciais

Definição 7.1. *Um grafo direcionado $G(V, A)$ é constituído por um conjunto $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ não-vazio de objetos, chamados vértices (ou nós), e um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ de arestas ou arcos, e*

uma aplicação Ψ que associa cada aresta a um par ordenado de vértices.

Os digrafos são representados através de um diagrama onde os vértices são representados por pontos e cada aresta (v_i, v_j) é representada por uma linha ligando v_i a v_j com uma seta apontando para v_j .

Exemplo 7.2. Em cada caso, qual é a aplicação Ψ ?

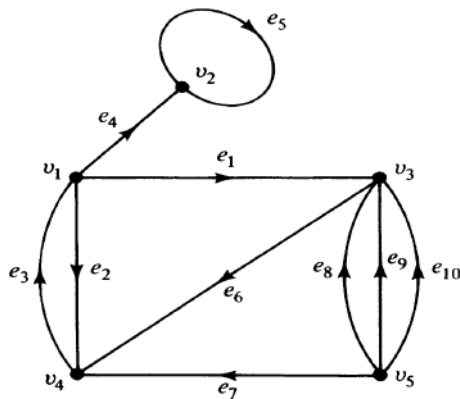


Em um digrafo, quando dizemos que uma aresta é incidente a um vértice queremos saber em que sentido, isto é, se a aresta é convergente ou divergente a este vértice. É natural dizer que uma aresta a associada ao par (v_i, v_j) é convergente a v_j e divergente de v_i .

Em relação ao grau de um vértice v_i queremos também saber:

- o número de arestas convergentes, chamado **grau de entrada** e denotado $d_e(v_i)$ (ou $d^-(v_i)$);
- o número de arestas divergentes, chamado **grau de saída** e denotado $d_s(v_i)$ (ou $d^+(v_i)$).

Exemplo 7.3. Considere o digrafo abaixo:



Temos:

$$d_s(v_1) = 3, \quad d_e(v_1) = 1;$$

$$d_s(v_2) = 1, \quad d_e(v_2) = 2;$$

$$d_s(v_5) = 4, \quad d_e(v_5) = 0.$$

Exercício. Seja $G(V, A)$ um digrafo. Mostre que

$$\sum_{v_i \in V} d_e(v_i) = \sum_{v_i \in V} d_s(v_i) = m,$$

onde m é o número de arestas de G .

Temos uma **fonte** quando o grau de entrada é nulo e um **sumidouro** quando o grau de saída é nulo.

Duas arestas são **paralelas** se elas incidem nos mesmos vértices e possuem a mesma orientação.

Muitas das propriedades de grafos não orientados são válidas para digrafos e portanto muitas vezes a orientação do grafo é desconsiderada.

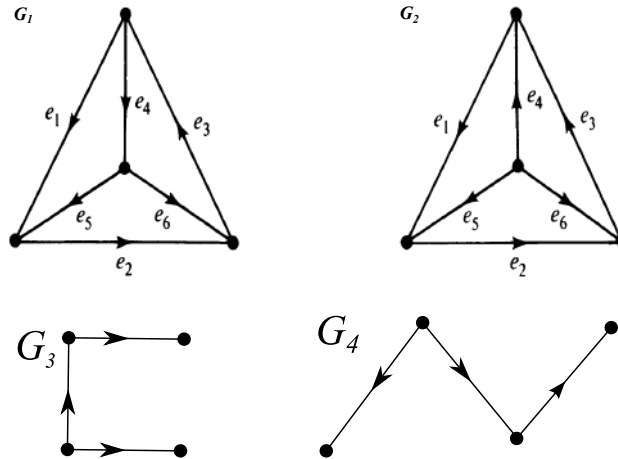
Definimos o **grafo associado** a um digrafo G como sendo o grafo obtido desconsiderando a orientação de G .

A operação oposta também pode ser considerada: dado um grafo (não orientado) G podemos definir alguma orientação para suas arestas obtendo assim um digrafo \vec{G} chamado de **um digrafo associado** a G .

Observemos que enquanto o grafo associado a um digrafo é único (a menos de isomorfismos), um digrafo associado a um grafo pode ter várias orientações distintas.

Dados digrafos G e H , dizemos que eles são **isomorfos** quando os grafos associados são isomorfos e além disso a orientação das arestas coincide.

Exercício. Verifique se os pares de digrafos abaixo (G_1 e G_2 , G_3 e G_4) são isomorfos.



7.3 Tipos de Digrafos

Seja $G(V, A)$ um digrafo. Então G é dito:

- **Simple** se não possui *loops* ou arestas paralelas;
- **Assimétrico** se possui no máximo uma aresta orientada entre cada par (não-ordenado) de vértices;

Grafos assimétricos podem ter *loops*;

- **Simétrico** se para cada aresta (a, b) existe também uma aresta (b, a) ;
- **Completo Simétrico** se G é simple e existe exatamente uma aresta direcionada de todo vértice para todos os outros vértices;
- **Completo Assimétrico** se G é assimétrico e existe exatamente uma aresta entre cada par (não-ordenado) de vértices;
- **Balanceado** se $d_e(v_i) = d_s(v_i)$ para todo $v_i \in V$;

- **Regular** se existe um inteiro k tal que tal que $d_e(v_i) = d_s(v_i) = k$ para todo $v_i \in V$. Dizemos que o digrafo é k -regular.

Os conceitos acima estão ilustrados nas Figuras 7.3 - 7.3.

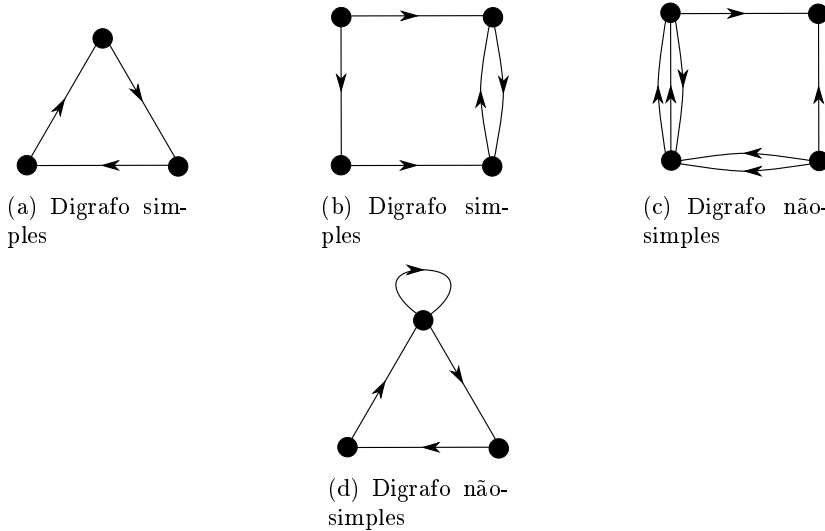


Figura 7.1: Digrafos simples e não-simples

Exercícios.

1. Mostre que um digrafo completo assimétrico com n vértices possui $n(n-1)/2$ arestas.
2. Mostre que um digrafo completo simétrico com n vértices possui $n(n-1)$ arestas.

7.4 Caminhos Orientados e Conexidade

Definimos passeios da mesma forma que para grafos. No entanto, a orientação das arestas deve coincidir: isto é, dado um par de arestas consecutivas onde v é o vértice comum, a primeira aresta converge para v enquanto a segunda diverge de v . Neste caso podemos chamar a sequência de passeio orientado, ou simplesmente passeio. Quando a orientação das arestas não coincide, dizemos que a sequência é um semi-passeio. De forma similar definimos trajetos, semi-trajetos, caminhos, semi-caminhos, circuitos e semi-circuitos.

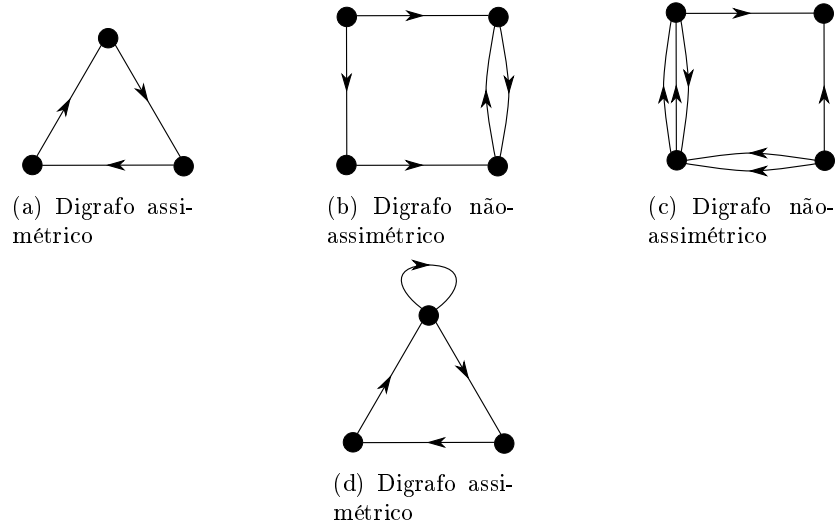


Figura 7.2: Digrafos assimétricos e não-assimétricos

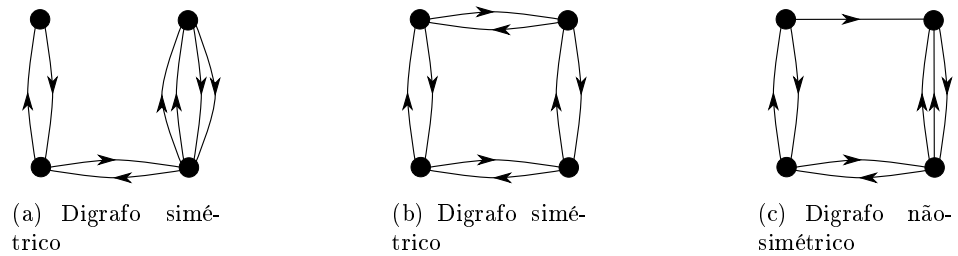


Figura 7.3: Digrafos simétricos e não-simétricos

Exercício. Construir um passeio, um semi-passeio, um trajeto, um semi-trajeto, um caminho, um semi-caminho, um circuito e um semi-circuito para o digrafo abaixo:

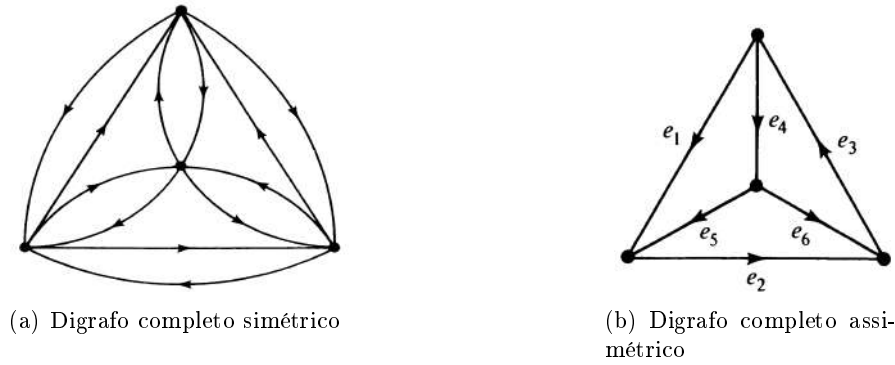


Figura 7.4: Digrafos completos

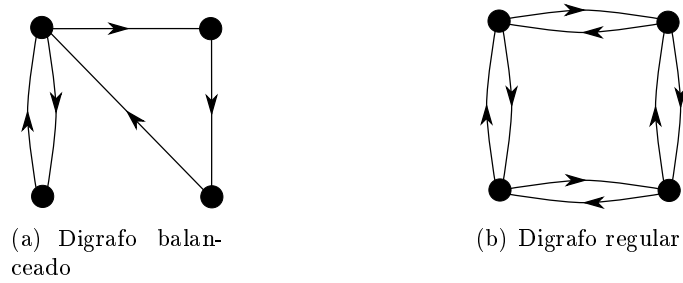
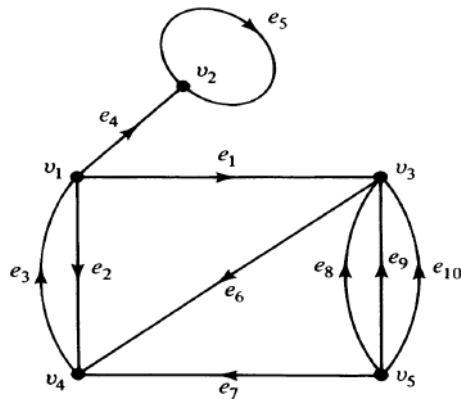


Figura 7.5: Digrafos balanceado e regular

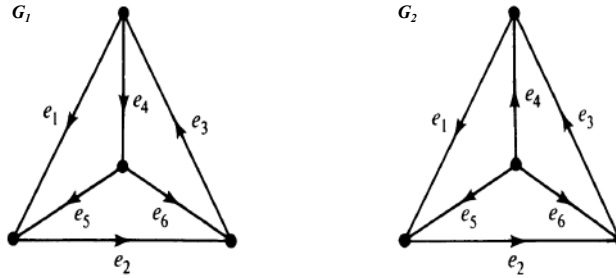


Definição 7.4. Um digrafo $D(V, A)$ é **fortemente conexo** se existe um caminho orientado de v_i para v_j e de v_j para v_i , quaisquer que sejam $v_i, v_j \in V$.

Um digrafo $D(V, A)$ é **fracamente conexo** se o grafo associado é

conexo mas D não é fortemente conexo.

Exemplo 7.5. Abaixo temos à esquerda um grafo fortemente conexo e à direita um grafo fracamente conexo:



Definição 7.6. Um digrafo é dito ser **acíclico** se não possui circuitos.

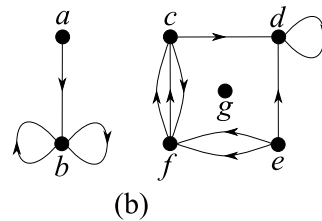
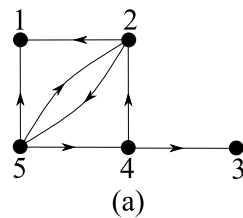
Propriedades:

- Um digrafo é acíclico se, e somente se, todo trajeto orientado é também um caminho orientado.
- Todo digrafo acíclico possui pelo menos uma fonte e um sumidouro.

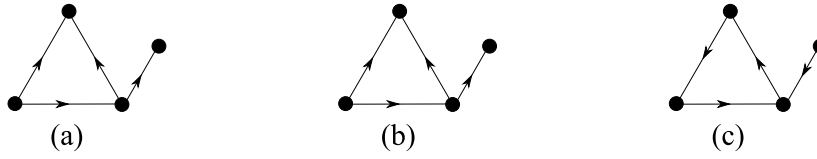
Exercícios:

Alguns exercícios foram selecionados do livro “Graphs - An Introductory Approach - R.J. Wilson e J.J Watkins” (vide ref. [26]).

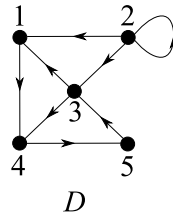
1. Encontre exemplos que ilustrem as propriedades acima. Demonstre as propriedades acima.
2. Escreva o conjunto de vértices e família de arestas para os seguintes digrafos:



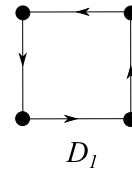
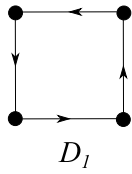
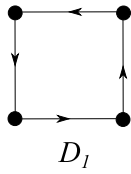
3. Quais dos seguintes digrafos são subdigrafos do digrafo (a) no problema anterior?



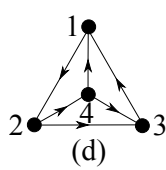
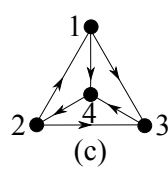
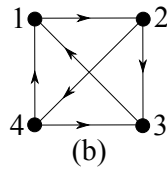
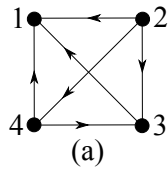
4. Seja D o digrafo



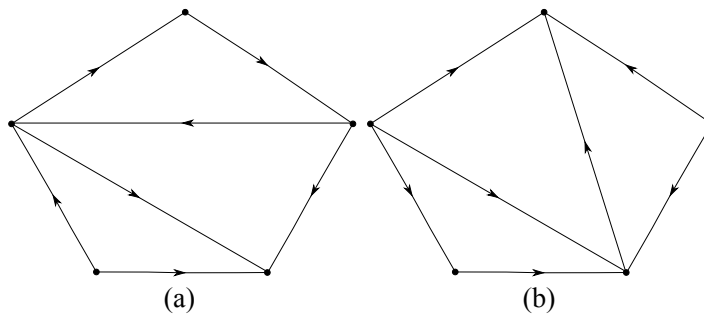
Quais dos seguintes são subdigrafos de D ?

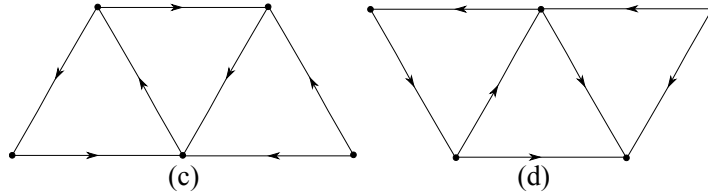


5. Dos seguintes quatro digrafos, quais dois são o mesmo, qual é isomorfo a estes dois, e qual não é isomorfo aos outros?

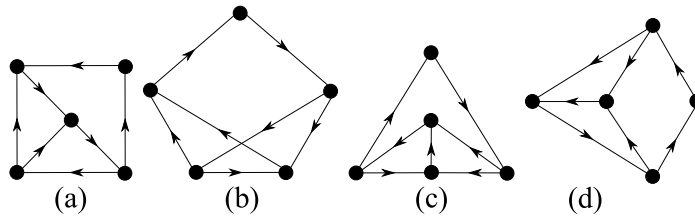


6. Quais dos seguintes digrafos são isomorfos?





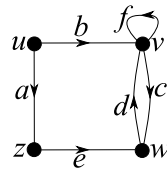
7. Quais dois dos seguintes digrafos são isomorfos?



8. Esboce dois digrafos não-simples e não-isomorfos com 4 vértices e 6 arestas.

9. Existem 16 digrafos simples (a menos de isomorfismos) com 3 vértices. Esboce-os.

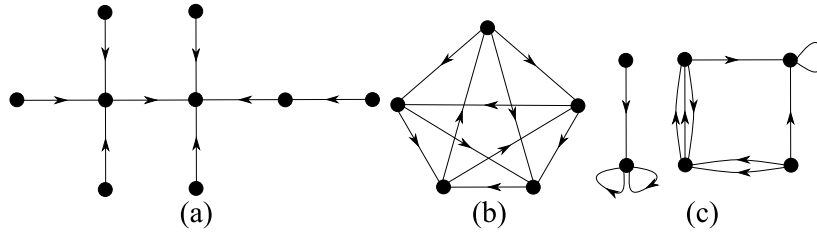
10. Considere o seguinte digrafo D :



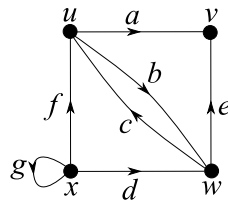
Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

- (a) u e z são adjacentes;
- (b) v e z são adjacentes;
- (c) b é incidente de z ;
- (d) f é incidente de v ;
- (e) a é incidente para u ;
- (f) e é incidente para z .

11. Verifique o “di-lema do aperto de mãos” para os digrafos abaixo:

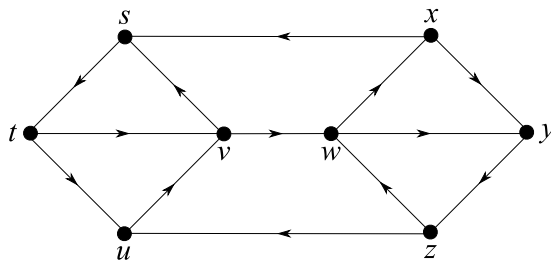


12. No seguinte digrafo, se possível,



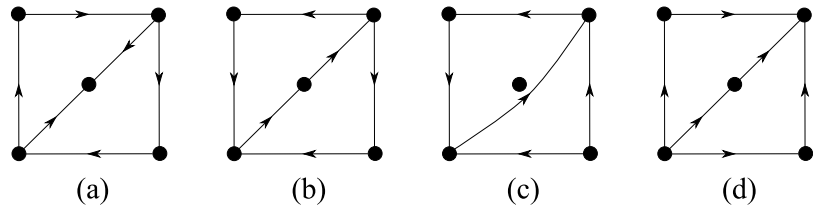
- (a) encontre um passeio de comprimento 7 de u para w ;
- (b) encontre circuitos de comprimentos 1, 2, 3, e 4;
- (c) encontre um caminho de comprimento máximo.

13. No seguinte digrafo,



- (a) encontre todos os caminhos de s para z ;
- (b) encontre todos os caminho de z para s ;
- (c) encontre um trajeto fechado de comprimento 8 contendo s e z . Existem circuitos contendo ambos s e z ?

14. Classifique cada um dos seguintes digrafos como desconexo, conexo mas não fortemente conexo, ou fortemente conexo:



Capítulo 8

Grafos e Algoritmos

Problemas de otimização e problemas computacionais em geral são resolvidos por meio de algoritmos. De uma forma vaga, podemos dizer que um algoritmo é um conjunto finito de instruções do tipo usado em linguagens de programação tais como: operações aritméticas, instruções condicionais, instruções de leitura e escrita.

O tempo de execução de um algoritmo depende de vários fatores, entre eles: boa prática de programação, codificação das instruções de forma inteligente, estrutura de dados, equipamento onde está sendo executado. Apesar da importância destes fatores, estamos interessados em avaliar a qualidade de um algoritmo independentemente da forma em que está codificado ou da máquina onde está sendo executado.

Uma maneira de avaliar o desempenho computacional de um algoritmo independentemente de uma implementação particular é calcular aproximadamente o número de operações (aritméticas, condicionais, etc.) que o mesmo executa. Esta prática é em geral satisfatória, apesar de desconsiderar que operações com números inteiros de poucos dígitos são menos trabalhosas que operações envolvendo números reais de alta precisão, ou números inteiros de muitos dígitos. Um cálculo mais preciso considera também os dados do problema. Neste curso, iremos considerar apenas os dados relativos à dimensão do problema. Um tratamento mais detalhado sobre a avaliação do desempenho computacional de um algoritmo pode ser encontrado em [6], [7] e [12].

Considere por exemplo, os dois algoritmos descritos a seguir. O primeiro se destina a calcular o produto escalar de dois vetores, e o segundo calcula o produto de duas matrizes.

Exemplo 8.1 (Produto escalar entre dois vetores (Algoritmo 1)). *Calcula o produto escalar p entre os vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$.*

início

$$p = v(1) * w(1)$$

Para $i = 2$ até n faça

$$p = p + v(i) * w(i)$$

fim

escreva p

fim

Exemplo 8.2 (Produto de duas matrizes (Algoritmo 2)). *Calcula o produto C de duas matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$.*

início

para $i = 1$ até m faça

para $j = 1$ até p faça

$$c(i, j) = a(i, 1) * b(1, j)$$

para $k = 2$ até n

$$c(i, j) = c(i, j) + a(i, k) * b(k, j)$$

fim

fim

fim

fim

Note que no Algoritmo 1 temos n multiplicações e $n - 1$ adições totalizando $2n - 1$ operações. O algoritmo 2 calcula os elementos $c(i, j)$ da matriz C fazendo o produto escalar entre a linha i da matriz A e a coluna j da matriz B . Isto é, são calculado $m * p$ produtos escalares que por sua vez requerem $2n - 1$ operações, totalizando $m * p * (2n - 1)$ operações.

Para os algoritmos 1 e 2 foi possível fazer a contagem exata do número de operações que cada um executa. Porém, nem sempre a contagem do número de operações é trivial. Procura-se então fazer uma estimativa do crescimento do número de operações em função dos parâmetros que definem o problema. Assim, para o Algoritmo 1 é suficiente dizer que o número de operações executadas é uma função linear de n , enquanto que o número de operações do Algoritmo 2 é uma função cúbica de n, m e p .

Para maior precisão na estimativa do número de operações é utilizada a expressão “ordem de magnitude” definida a seguir.

Definição 8.3. *Sejam $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Dizemos que:*

- (i) $f(n)$ é $O(g(n))$ (f é da ordem de g) se existirem constantes c, n_0 tais que $f(n) \leq cg(n)$ para $n \geq n_0$ (complexidade no pior caso).
- (ii) $f(n)$ é $\Omega(g(n))$ (f é da ordem de g) se existirem constantes c, n_0 tais que $f(n) \geq cg(n)$ para $n \geq n_0$ (complexidade no melhor caso).
- (iii) $f(n)$ é $\Theta(g(n))$ se $f(n)$ é $O(g(n))$ e $f(n)$ é $\Omega(g(n))$ (complexidade exata).

Veja Figura 8.

- Exemplo 8.4.**
1. $f(p) = 3p^3 + 2p^2$ é da ordem de p^3 , ou simplesmente f é $O(p^3)$, pois para $p_0 = 0$ e $c = 5$, temos $3p^3 + 2p^2 \leq 5p^3$.
 2. $f(p) = (p + 1)^2$ é da ordem de $O(p^2)$. Neste caso, para $p_0 = 1$ e $c = 4$, temos $(p + 1)^2 \leq 4p^2$.
 3. $f(p) = 542$ é $O(1)$.
 4. Observe que com esta definição as funções $f(x) = 10^{10}n^3 + n^2$ e $g(x) = n^3 + n^2$ possuem complexidade $O(n^3)$.

Exercício: Verificar que:

- a) $f(p) = 3p^3 + 2p^2 + 10$ é $\Theta(p^3)$.
- b) $f(n) = n \log n$ é $O(n^2)$ e $\Omega(n)$.

Como avaliar se a complexidade de um dado algoritmo é boa ou ruim?

Suponha que possamos escolher entre dois algoritmos, A e B. O tempo de execução do algoritmo A é $10^n/100$, isto é, $O(10^n)$ (exponencial) e do algoritmo B é $10n^3$, isto é, $O(n^3)$ (polinomial). Para valores bem pequenos de n , por exemplo $n = 3$, o algoritmo A é mais eficiente que o algoritmo B. Veja a tabela abaixo:

n	$10^n/100$	$10n^3$
3	10	90
4	100	640
5	1000	1250
6	10000	2160

Mas o que acontece para valores maiores de n ? Suponha que dispomos de uma máquina capaz de executar 10^7 operações aritmética por segundo, e que estamos dispostos a executar os dois algoritmos por 1000 segundos. Qual é a dimensão dos problemas que poderíamos resolver com cada um dos algoritmos dentro deste intervalo de tempo?

Se a máquina executa 10^7 operações por segundo, o algoritmo A executado nesta máquina pode realizar quantas operações em 1000 segundos?

Uma simples regra de três

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ s} & \longleftrightarrow & 10^7 \\ 1000 \text{ s} & \longleftrightarrow & 10^n/100 \end{array}$$

nos leva à seguinte equação:

$$\frac{10^n}{100} = 10^7 * 1000 \Rightarrow n = 12.$$

Isto é, neste tempo, o algoritmo A resolve problemas com $n \leq 12$. Fazendo um raciocínio similar para o algoritmo B, temos que este resolve problemas com $n \leq 1000$. Estes cálculos indicam que algoritmos polinomiais permitem a resolução de problemas maiores dentro de um mesmo intervalo de tempo.

De uma maneira geral algoritmos com complexidade computacional polinomial são considerados rápidos e eficientes enquanto que os algoritmos com complexidade exponencial são vistos como lentos e ineficientes. Este ponto de vista se justifica em muitas, mas não todas, situações. A otimização linear é um exemplo onde algoritmos exponenciais (baseados no método simplex) e algoritmos polinomiais (métodos de ponto interior) competem em pé de igualdade.

O estudo de complexidade de algoritmos será útil para determinarmos o grau de dificuldade de resolução de problemas em Grafos. Em geral as medidas de complexidade são feitas em função da dimensão do problema. No caso de grafos em função do número de vértices, n , e do número de arestas, m .

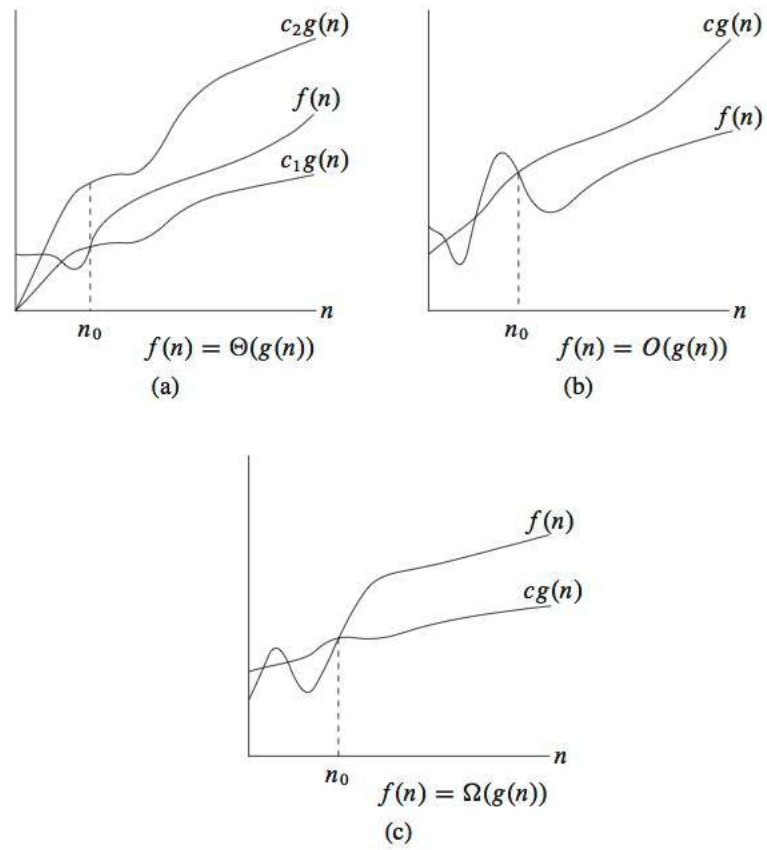


Figura 8.1: O item (a) ilustra a complexidade exata; (b) ilustra complexidade no pior caso; (c) ilustra complexidade no melhor caso.

Capítulo 9

Representação de Grafos

A representação computacional de um grafo (ou digrafo) deve usar uma estrutura que:

- i) corresponde de forma única a um grafo dado;
- ii) pode ser armazenada e manipulada em um computador.

A representação gráfica de um grafo através do diagrama de pontos e linhas não satisfaz a segunda condição acima.

Vamos discutir a seguir algumas estruturas que satisfazem estes dois critérios.

9.1 Matriz de Adjacência

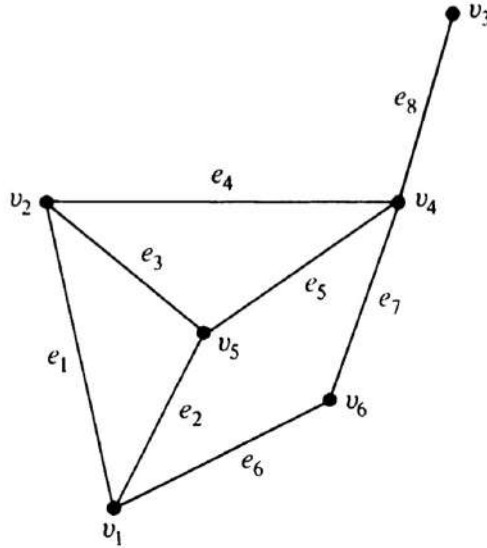
Considere um grafo $G(V, A)$ com n vértices e m arestas. A matriz de adjacência é uma matriz $n \times n$, denotada por $X = [x_{ij}]$ e definida como:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe uma aresta entre os vértices } v_i \text{ e } v_j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observações:

- É necessário fazer uma rotulação nos vértices de G .
- A complexidade em termos de espaço de memória de um algoritmo que use uma matriz de adjacência para armazenar o grafo é $O(n^2)$.
- Qualquer tipo de grafo pode ser armazenado nesta estrutura? Não! Apenas grafos que não possuam arestas paralelas.

Exemplo 9.1. *Abaixo temos um grafo e sua matriz de adjacência:*



$$X = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Observações:

- As entradas ao longo da diagonal principal de X são todas nulas se, e somente se, o grafo não possui laços. Quando há um laço em um vértice v_i temos $x_{ii} = 1$.
- Se o grafo é simples, o grau de um vértice é dado pela soma dos elementos de sua linha (ou coluna) correspondente.

- Permutações de linhas e das colunas correspondentes implicam em uma reordenação dos vértices. Portanto dois grafos simples G_1 e G_2 são isomorfos se, e somente se, $X(G_2) = R^{-1}X(G_1)R$, onde R é uma matriz de permutação.
- Dado uma matriz qualquer $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica e binária, sempre é possível construir um grafo G com n vértices tal que $X(G) = Q$.
- Quantos elementos diferentes de zero esta matriz possui?
- Um grafo G é desconexo com dois componentes G_1 e G_2 se, e somente se,

$$X(G) = \begin{bmatrix} X(G_1) & 0 \\ 0 & X(G_2) \end{bmatrix}.$$

- O que representa a matriz $B = X^2$? Os elementos b_{ij} , $i \neq j$, representam o número de caminhos distintos de comprimento 2 entre os vértices v_i e v_j . De fato:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik}x_{kj} = x_{i1}x_{1j} + x_{i2}x_{2j} + \dots + x_{in}x_{nj}$$

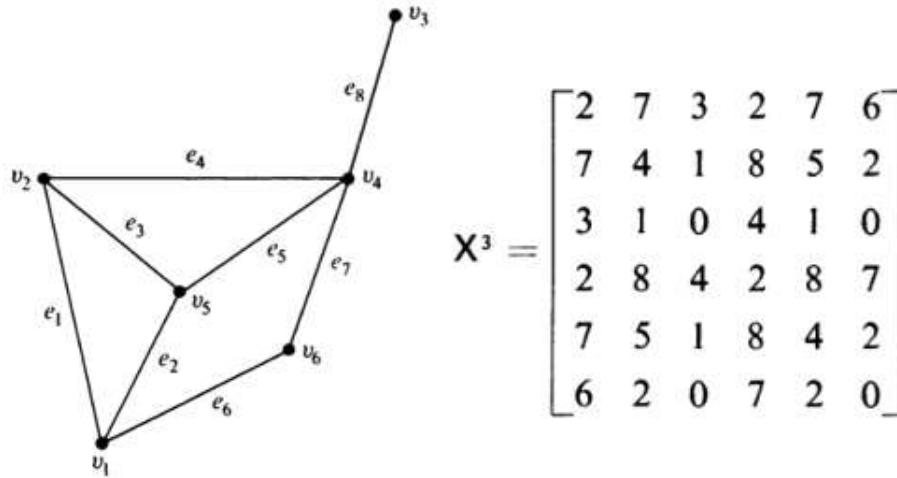
e existe um caminho se $x_{ik} = x_{kj} = 1$, e o caminho é dado por

$$\{i, (i, k), k, (k, j), j\}.$$

Teorema 9.2. *Seja X a matriz de adjacência de um grafo simples G . Então a ij -ésima entrada de X^r é o número de passeios diferentes de comprimento r entre os vértices v_i e v_j .*

Demonstração. Ver página 161 de DEO, N.: Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974. \square

Exemplo 9.3. *Abaixo temos um grafo e sua matriz de adjacência na terceira potência:*



Observe, por exemplo, a 1,5-ésima entrada de X^3 , igual a 7. Esta entrada corresponde aos seguintes passeios de comprimento três entre v_1 e v_5 :

$$\begin{aligned} & \{v_1, e_1, v_2, e_1, v_1, e_2, v_5\}, \{v_1, e_2, v_5, e_2, v_1, e_2, v_5\}, \\ & \{v_1, e_6, v_6, e_6, v_1, e_2, v_5\}, \{v_1, e_2, v_5, e_3, v_3, e_3, v_5\}, \\ & \{v_1, e_6, v_6, e_7, v_4, e_5, v_5\}, \{v_1, e_2, v_5, e_5, v_4, e_5, v_5\}, \\ & \{v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_5, v_5\}. \end{aligned}$$

Corolário 9.4. Em um grafo conexo, a distância entre dois vértices v_i e v_j , $i \neq j$, é k se, e somente se, k é o menor inteiro para o qual a ij -ésima entrada em X^k é não-nula.

Corolário 9.5. Se X é a matriz de adjacência de um grafo com n vértices, e

$$Y = X + X^2 + X^3 + \dots + X^{n-1},$$

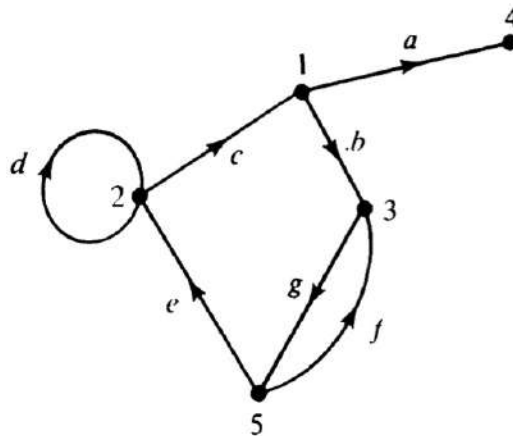
então G é desconexo se, e somente se, existe ao menos uma entrada na matriz Y que é igual a zero.

É possível utilizar esta estrutura para armazenar digrafos?

Sim. Dado um digrafo $D(V, A)$ com n vértices e sem arestas paralelas, definimos

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe uma aresta direcionada do vértice} \\ & v_i \text{ para o vértice } v_j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 9.6. *Abaixo temos um digrafo e sua matriz de adjacência:*



$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

Observações:

- Neste caso a matriz só será simétrica se o digrafo for simétrico.
- O grau de saída do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da linha i .
- O grau de entrada do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da coluna i .
- Se X é a matriz de adjacência de um digrafo D , então a sua transposta X^T é a matriz de adjacência do digrafo obtido pela inversão da orientação das arestas de D .

9.2 Matriz de Incidência

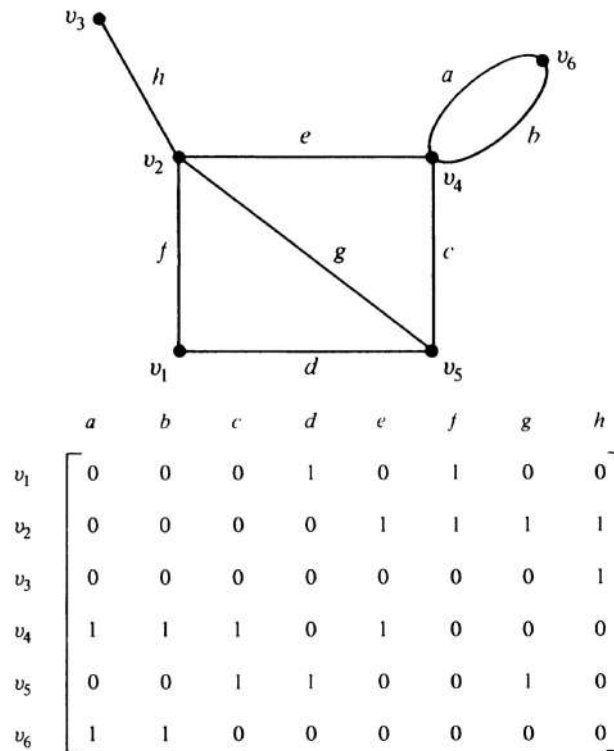
Seja G um grafo com n vértices e m arestas. Sua matriz de incidência é uma matriz de ordem $n \times m$, denotada por $A = [a_{ij}]$, definida como

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } a_j \text{ é incidente no } v_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observações:

- É necessário fazer uma rotulação nos vértices e nas arestas de G .
- A complexidade em termos de espaço de memória de um algoritmo que use uma matriz de adjacência para armazenar o grafo é $O(nm)$.
- Qualquer tipo de grafo pode ser armazenado nesta estrutura? Não! Apenas grafos que não possuam arestas laço.

Exemplo 9.7. *Abaixo temos um grafo e sua matriz de incidência:*



Observações:

- Como cada aresta é incidente em exatamente dois vértices, cada coluna de $A(G)$ possui exatamente dois 1's.
- O número de 1's em cada linha é igual ao grau do vértice correspondente.
- Uma linha de 0's representa um vértice isolado.
- Arestas paralelas correspondem a colunas idênticas.
- Se G é um grafo desconexo com dois componentes G_1 e G_2 , então

$$A(G) = \begin{bmatrix} A(G_1) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{bmatrix}.$$

- Dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos se, e somente se, suas matrizes de incidência $A(G_1)$ e $A(G_2)$ diferem apenas por permutações de linhas ou colunas.
- Quantos elementos diferentes de zero esta matriz possui?

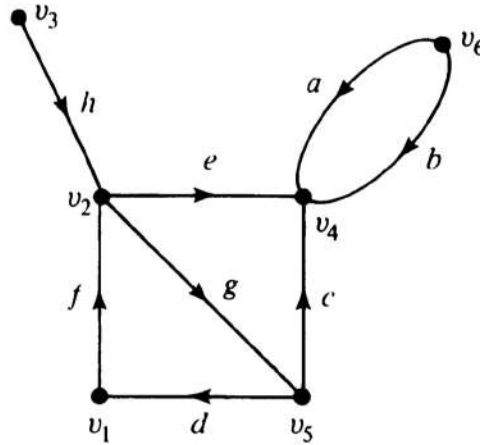
É possível utilizar esta estrutura para armazenar digrafos?

Sim. Com uma pequena modificação, uma vez que ao dizer que uma aresta incide em um vértice é necessário especificar se ela converge para ou diverge para este vértice.

Seja D um digrafo com n vértices e m arestas e sem arestas laço. Sua matriz de incidência $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é definida como

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } a_j \text{ diverge do vértice } v_i, \\ -1 & \text{se a aresta } a_j \text{ converge para o vértice } v_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 9.8. *Abaixo temos um digrafo e sua matriz de incidência:*



	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
v_1	0	0	0	-1	0	1	0	0
v_2	0	0	0	0	1	-1	1	-1
v_3	0	0	0	0	0	0	0	1
v_4	-1	-1	-1	0	-1	0	0	0
v_5	0	0	1	1	0	0	-1	0
v_6	1	1	0	0	0	0	0	0

As duas representações dadas (matrizes de adjacência e de incidência) são importantes porque elas facilitam a recuperação de uma série de informações a respeito de um grafo. Por exemplo, o grau de um vértice, determinar se dois vértices são adjacentes, entre outras. No entanto elas não valem para qualquer grafo dado, e demandam muito espaço de memória: $O(n^2)$ e $O(nm)$ para armazenar apenas $2m$ elementos diferentes de zero.

É possível encontrar formas mais eficientes de armazenamento de dados.

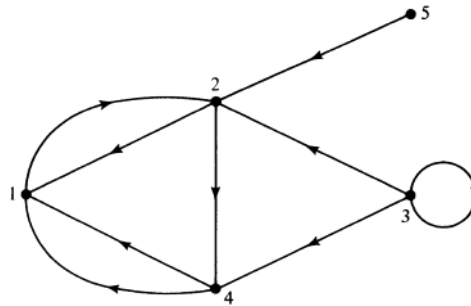
É bom salientar no entanto que a melhor maneira de armazenar um grafo ou digrafo vai depender do algoritmo a ser implementado.

9.3 Lista de Arestas

O digrafo (ou grafo) G é representado por dois vetores m -dimensionais $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ e $H = (h_1, h_2, \dots, h_m)$. Cada elemento destes vetores recebe o rótulo de um vértice, de modo que a i -ésima aresta diverge do vértice f_i e converge para o vértice h_i . Se G é não-direcionado, os vetores são definidos da mesma forma, apenas desconsidere os termos “converge” e “diverge”.

Qual é o espaço necessário para esta estrutura? $O(2m)$.

Exemplo 9.9. *Abaixo temos um digrafo e sua lista de arestas:*



$$F = (5, 2, 1, 3, 2, 4, 4, 3, 3),$$

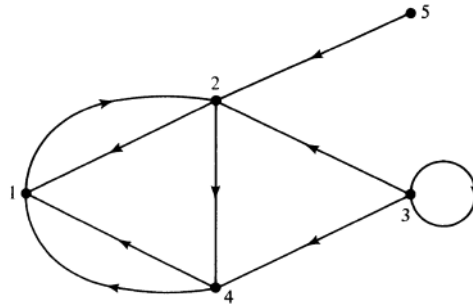
$$H = (2, 1, 2, 2, 4, 1, 1, 4, 3).$$

9.4 Lista de Sucessores

Quando a razão m/n não é muito alta, é conveniente usar uma sucessores. Para isto definimos n vetores. Cada vetor é associado a um vértice. O primeiro elemento do vetor k é o vértice v_k e os demais elementos são os vértices adjacentes ao vértice v_k . Em um digrafo, os vértices que possuem um caminho direcionado de comprimento um a partir de v_k .

Supondo que d_{med} é o grau médio (ou grau de saída médio), o espaço de memória necessário para esta estrutura é $O(nd_{med})$.

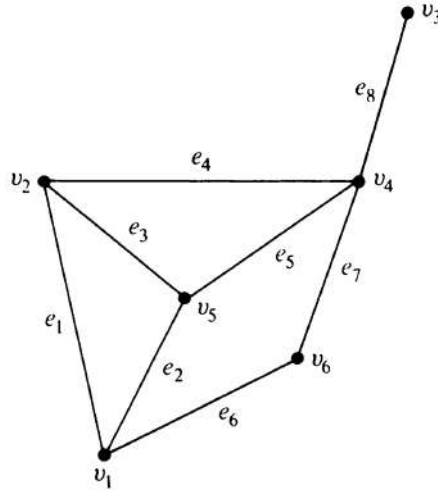
Exemplo 9.10. *Abaixo temos um digrafo e sua lista de sucessores:*



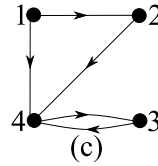
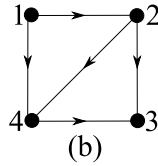
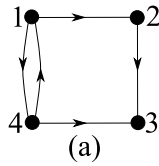
1: 2
 2: 1, 4
 3: 2, 3, 4
 4: 1, 1
 5: 2

Exercícios:

1. Escreva um algoritmo para transformar a matriz de incidência de um grafo (ou digrafo) na matriz de adjacências. Codifique o algoritmo na sua linguagem de programação favorita. Teste com grafos de diversas densidades. Qual é a complexidade computacional do seu algoritmo?
2. Seja X a matriz de adjacência de um grafo G que não possui laços. Mostre que os valores em cada entrada na diagonal da matriz X^2 é igual ao grau do vértice correspondente. Mostre que os valores em cada entrada na diagonal da matriz X^3 é igual ao dobro do número de circuitos de comprimento três que passam pelo vértice correspondente.
3. Encontre outras estruturas para representação de grafos (*e.g.* estrela direta, estrela reversa).
4. Construa a lista de arestas e a lista de sucessores para o grafo abaixo:



5. Corresponda cada um dos seguintes digrafos com sua lista de arestas, sua matriz de adjacência e sua matriz de incidência:



Lista de arestas:

$$L_1: 12, 14, 43, 24, 34$$

$$L_2: 12, 14, 43, 24, 23$$

$$L_3: 12, 14, 43, 41, 23$$

Matrizes de Adjacência:

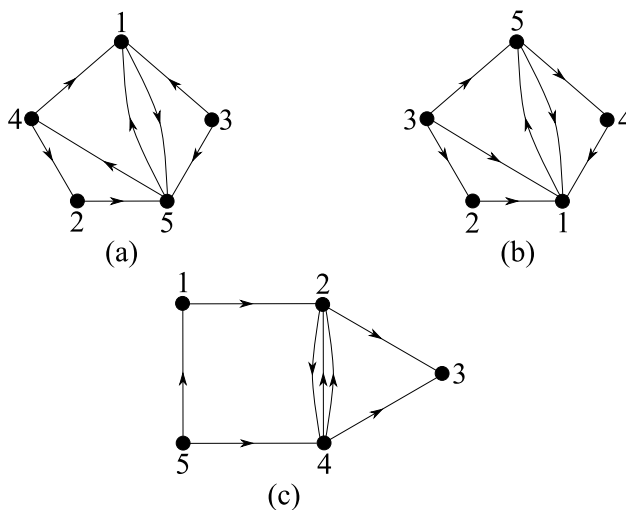
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizes de Incidência:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Escreva as matrizes de adjacência dos seguintes digrafos:



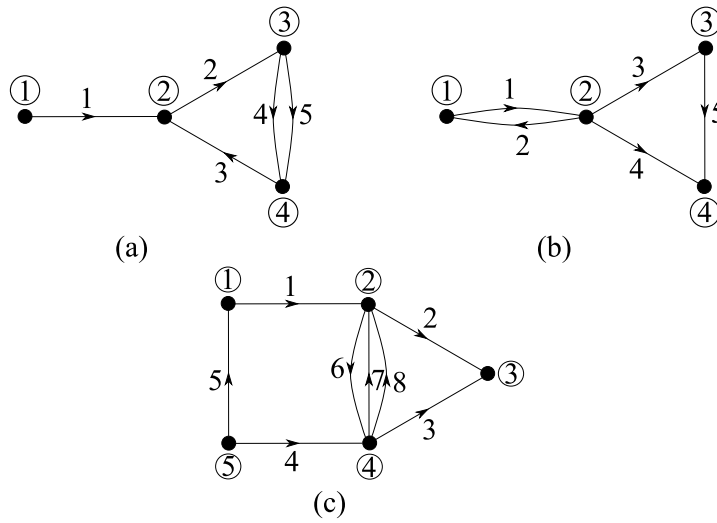
7. Esboce o digrafo cuja matriz de adjacência é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

8. O que você pode dizer em relação à soma dos números em

- (a) qualquer linha de uma matriz de adjacência?
- (b) qualquer coluna de uma matriz de adjacência?

9. Escreva a matriz de incidência de cada um dos seguintes digrafos:



10. Esboce o digrafo cuja matriz de incidência é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

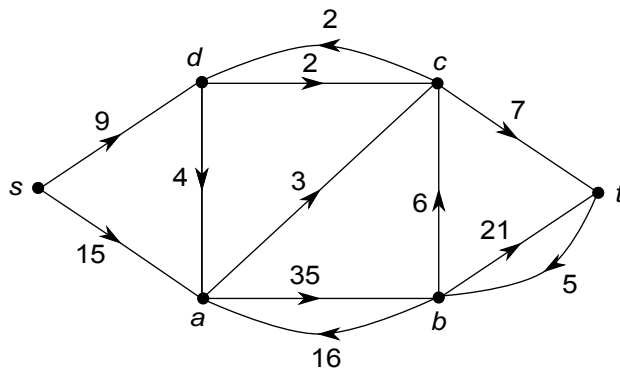
11. Escreva sub-rotinas para converter as seguintes representações de um grafo (ou digrafo):

- (a) Matriz de adjacência para matriz de incidência.
- (b) Matriz de incidência para matriz de adjacência.
- (c) Matriz de adjacência para lista de arestas.
- (d) Lista de arestas para lista de sucessores.

Capítulo 10

Caminho Mínimo em Grafos

Considere a rede:



Dado dois vértices nesta rede, queremos determinar o menor caminho entre eles.

Uma primeira questão é como representar os valores associados às arestas neste grafo. Isto pode ser feito através da *matriz de pesos*.

Definição 10.1. *Seja D um digrafo simples cujas arestas possuem “pesos” associados, digamos, a cada aresta (v_i, v_j) está associado um número real $w_{ij} \geq 0$ (que pode representar comprimento, distância, valor, etc). Vamos definir $w_{ii} = 0$ para todo i e $w_{ij} = \infty$ quando não existe uma aresta entre os vértices v_i e v_j . Assim a **matriz de pesos** é uma matriz $n \times n$ definida como $W = [w_{ij}]$, onde n é o número de vértices.*

Exemplo 10.2. A matriz de pesos para a rede acima é dada por:

$$W = \begin{bmatrix} & \vdots & s & a & b & c & d & t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s & \vdots & 0 & 15 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ a & \vdots & \infty & 0 & 35 & 3 & \infty & \infty \\ b & \vdots & \infty & 16 & 0 & 6 & \infty & 21 \\ c & \vdots & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & 7 \\ d & \vdots & \infty & 4 & \infty & 2 & 0 & \infty \\ t & \vdots & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Observação 10.3. Em geral

- $w_{ij} \neq w_{ji}$ e
- $w_{ij} + w_{jk}$ pode ser menor ou igual a w_{ik} .

Por exemplo, na rede anterior, $w_{sd} + w_{da} = 9 + 4 \leq 15 = w_{sa}$ e $w_{ab} = 35 \neq 16 = w_{ba}$.

Existem vários algoritmos para determinar o caminho mais curto entre um par de vértices em uma rede dada. Abaixo temos alguns exemplos:

Trabalho	Complexidade
Dijkstra (1959) ¹	$O(n^2)$
Ford (1956), Moore (1957), Bellman (1958)	$O(nm)$
Ford & Fulkerson (1962)	$O(nm)$
Floyd (1962)	$O(n^3)$
Hu (1968)	$O(nm)$
Dial (1969)	$O(m + Cn)^2$
Pape (1974)	$\Theta(n2^n)$
Pallottino (1984)	(n^2m)
Glover et al. (1984 e 1985)	$O(mn)$
Kelin & Reif	$O(n^{2/3} \log^{7/3} n (\log n + \log D))^3$
Goldberg & Radzik (1993)	$O(nm)$
Cohen (1996)	$O(\log^4 n)$
Träff & Zaroliagis (1996)	$O((n^{2\varepsilon} + n^{1-\varepsilon}) \log n)^4$
Henzinger et al. (1997)	$O(n^{3/4} L \log n)^5$
Pettie & Ramachandran (2005)	$O(m + n \log \log n)$

Para mais detalhes, ver [M. Goldberg & E. Goldberg, Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações, Elsevier Campus, 2012].

10.1 Ideia do Algoritmo de Dijkstra

Vamos supor que queremos encontrar o caminho mínimo entre os nós s e t em uma rede dada. A ideia consiste em:

- Rotular os vértices do digrafo.
- A partir do vértice inicial s , proceder em direção ao vértice final t (seguindo as arestas orientadas) rotulando os vértices com as suas distâncias ao vértice s , medidas até aquele momento.
- A cada estágio do algoritmo teremos vértices que possuem rótulos temporários e vértice com rótulos permanentes.
- O rótulo de um vértice v_j é feito permanente quando este rótulo representa a menor distância de s até v_j .
- Começamos associando rótulo permanente igual a zero para o vértice s , e um rótulo temporário igual a ∞ para os outros $n - 1$ vértices do grafo.
- A cada iteração, um novo vértice recebe um rótulo permanente de acordo com as seguintes regras:
 1. Cada vértice v_j com um rótulo temporário, recebe um novo rótulo temporário dado por:

$$\min\{\text{rótulo de } v_j, (\text{rótulo de } v_i) + w_{ij}\},$$

onde v_i é o vértice que recebeu rótulo permanente na iteração anterior e w_{ij} é o valor da aresta entre o vértice v_i e o vértice v_j .

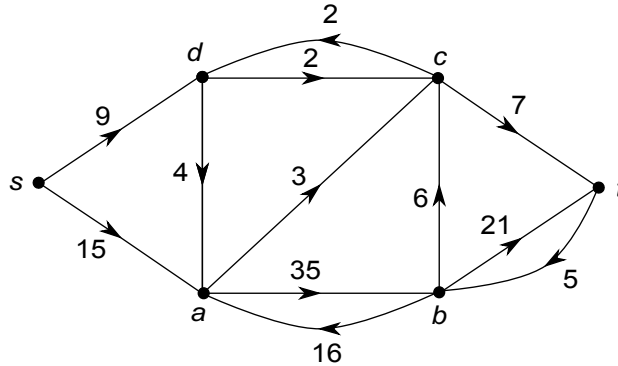
2. Encontre o menor valor entre os rótulos temporários.

Este será o rótulo permanente do respectivo vértice.

Em caso de empate selecione qualquer um dos candidatos e atribua rótulo permanente ao escolhido.

- Repetir 1 e 2 até que o vértice destino, t , receba um rótulo permanente.

Exemplo 10.4. Vamos aplicar a ideia acima à rede abaixo:



Inicialização: $rot(s) = 0$ é permanente, $rot(a) = rot(b) = rot(c) = rot(d) = rot(t) = \infty$ são temporários

$it = 1$

Regra 1 - Novo rótulo

$$\text{Novo } rot(a) = \min\{\infty, 0 + w_{sa}\} = \min\{\infty, 15\} = 15$$

$$\text{Novo } rot(b) = \min\{\infty, 0 + w_{sb}\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty$$

$$\text{Novo } rot(c) = \min\{\infty, 0 + w_{sc}\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty$$

$$\text{Novo } rot(d) = \min\{\infty, 0 + w_{sd}\} = \min\{\infty, 9\} = 9$$

$$\text{Novo } rot(t) = \min\{\infty, 0 + w_{st}\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty$$

Regra 2 - Rótulo permanente:

$$\min\{15, \infty, \infty, 9, \infty\} = 9 \Rightarrow rot(d) \text{ torna-se permanente}$$

$it = 2$

Regra 1 - Novo rótulo

$$\text{Novo } rot(a) = \min\{15, 9 + w_{da}\} = \min\{15, 9 + 4\} = 13$$

$$\text{Novo } rot(b) = \min\{\infty, 9 + w_{db}\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty$$

$$\text{Novo rot}(c) = \min\{\infty, 9 + w_{dc}\} = \min\{\infty, 9 + 2\} = 11$$

$$\text{Novo rot}(t) = \min\{\infty, 9 + w_{dt}\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty$$

Regra 2 - Rótulo permanente

$$\min\{13, \infty, 11, \infty\} = 11 \Rightarrow \text{rot}(c) \text{ torna-se permanente}$$

it = 3

Regra 1 - Novo rótulo

$$\text{Novo rot}(a) = \min\{13, 11 + w_{ca}\} = \min\{13, 11 + \infty\} = 13$$

$$\text{Novo rot}(b) = \min\{\infty, 11 + w_{cb}\} = \min\{\infty, 11 + \infty\} = \infty$$

$$\text{Novo rot}(t) = \min\{\infty, 11 + w_{ct}\} = \min\{\infty, 11 + 7\} = 18$$

Regra 2 - Rótulo permanente

$$\min\{13, \infty, 18\} = 13 \Rightarrow \text{rot}(a) \text{ torna-se permanente}$$

it = 4

Regra 1 - Novo rótulo

$$\text{Novo rot}(b) = \min\{\infty, 13 + w_{ab}\} = \min\{\infty, 13 + 35\} = 48$$

$$\text{Novo rot}(t) = \min\{18, 13 + w_{at}\} = \min\{18, 13 + \infty\} = 18$$

Regra 2 - Rótulo permanente

$$\min\{48, 18\} = 18 \Rightarrow \text{rot}(t) \text{ torna-se permanente}$$

Fim

Podemos parar pois o vértice destino, t, recebeu rótulo permanente. Assim o comprimento do menor caminho entre s e t é igual a 18.

Como recuperar o caminho?

A partir do vértice destino t, verificamos o vértice com rótulo permanente usado na obtenção do rótulo de t. No nosso exemplo, o vértice c. Repetimos o processo a partir de c até alcançar o vértice inicial s. Assim temos t, c, d, s. O caminho é obtido invertendo a ordem obtida: s, d, c, t.

10.2 Implementação

Em uma possível implementação deste algoritmo vamos precisar armazenar as seguintes informações:

- Indicação se um vértice v_k possui rótulo permanente ou temporário.
- Guardar a menor distância entre o vértice inicial s e o vértice v_k .
- Guardar o vértice com rótulo permanente que deu origem a um novo rótulo (importante para recuperar o caminho).

Assim vamos podemos definir a seguinte estrutura de dados:

1. Entrada de dados: matriz de pesos W ($O(n^2)$).
2. A dificuldade é distinguir, a cada iteração, os vértices com rótulos permanentes e os vértices com rótulo temporário.

Utilizamos um vetor lógico (ou binário) n -dimensional:

$$\text{final}(v) = \begin{cases} \text{True} & \text{se o rótulo do vértice } v \text{ é permanente,} \\ \text{False} & \text{se o rótulo do vértice } v \text{ é temporário.} \end{cases}$$

3. Precisamos também de um vetor n -dimensional para guardar as distâncias acumuladas do vértice inicial s aos outros vértices v_i . Vamos chamar este vetor de dist .
4. Como recuperar o caminho? Sabemos que a menor distância será dada por $\text{dist}(t)$. Mas qual é este caminho?

Cada vez que o rótulo de um vértice é modificado precisamos saber a partir de que vértice foi calculado o novo rótulo. Mantendo um vetor n -dimensional pred tal que

- $\text{pred}(v)$ indica o vértice com rótulo permanente que deu origem ao rótulo do vértice v ,
- e se v for o vértice inicial, então $\text{pred}(s) = -1$;

temos que o menor caminho é dado por:

$$s, \text{pred}(\text{pred}(\dots)), \dots, \text{pred}(\text{pred}(t)), \text{pred}(t), t.$$

Considere um digrafo $D(V, A)$, com n vértices e sua matriz de pesos $W = [w_{ij}]$, $n \times n$. Queremos encontrar o menor caminho entre o vértice s e o vértice t no digrafo D . Defina os vetores:

- $\text{final}(i)$ – indica se o vértice v_i recebeu rótulo permanente (potencial) ou não;
- $\text{dist}(i)$ – indica a distância acumulada do vértice inicial s até o vértice v_i ;
- $\text{pred}(i)$ – indica o vértice com rótulo permanente que deu origem ao rótulo do vértice v_i .

10.3 Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo a seguir pode ser encontrado em [M. Syslo, N. Deo, J.S. Kowallk, Discrete Optimization Algorithms].

Inicialização

para todo $v \in V$ **faça**

início

$\text{dist}(v) = \infty$
 $\text{final}(v) = \text{falso}$
 $\text{pred}(v) = -1$

fim

$\text{dist}(s) = 0$

$\text{final}(s) = \text{verdadeiro}$

$\text{recente} = s$

Iteração Principal

enquanto $\text{final}(t) = \text{falso}$ **faça**

início

para todo vértice v_j tal que exista a aresta $(\text{recente}, v_j)$ e tal que $\text{final}(j) = \text{falso}$ **faça**

início (atualização dos rótulos)

$$\text{rotulo} = \text{dist}(\text{recente}) + w_{\text{recente},j}$$

(o rótulo de v_j é modificado se houver um caminho menor de s a v_j através do vértice recente)

se rotulo < dist(j) **então**

início

$$\text{dist}(j) = \text{rotulo}$$

$$\text{pred}(j) = \text{recente}$$

fim

fim

(encontre o vértice com menor rótulo temporário)

Seja y o vértice com menor rótulo temporário, tal que $\text{dist}(y) \neq \infty$

início (o rótulo do vértice y se torna permanente)

$$\text{final}(y) = \text{verdadeiro}$$

$$\text{recente} = y$$

fim

fim

Exemplo 10.5. Rastrear o algoritmo de Dijkstra usando o digrafo com vértices s, a, b, c, d, t cuja matriz de pesos associada é:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 & 9 & 7 & \infty \\ 7 & 0 & 1 & \infty & \infty & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ 9 & \infty & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & \infty & \infty & 1 & 0 & 5 \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inicialização

$$\text{dist} = [\infty \ \infty \ \infty \ \infty \ \infty \ \infty]$$

$$\text{final} = [\text{falso} \ \text{falso} \ \text{falso} \ \text{falso} \ \text{falso} \ \text{falso}]$$

$$\text{pred} = [-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1]$$

$$\text{dist}(s) = 0$$

$final(s) = \text{verdadeiro}$

$recente = s$

it = 1

Vértices v tais que existe a aresta $(recente, v)$ e tais que $final(v) = \text{falso}$: a, b, c, d

v = a: $rotulo = dist(recente) + w_{recente,a} = 0 + 7 < \infty = dist(a)$

$dist(a) = 7$

$pred(a) = s$

v = b: $rotulo = dist(recente) + w_{recente,b} = 0 + 4 < \infty = dist(b)$

$dist(b) = 4$

$pred(b) = s$

v = c: $rotulo = dist(recente) + w_{recente,c} = 0 + 9 < \infty = dist(c)$

$dist(c) = 9$

$pred(c) = s$

v = d: $rotulo = dist(recente) + w_{recente,d} = 0 + 7 < \infty = dist(d)$

$dist(d) = 7$

$pred(d) = s$

Vértice y com menor rótulo temporário t.q. $dist(y) \neq \infty$: b

$final(b) = \text{verdadeiro}$

$recente = b$

it = 2

Vértices v tais que existe a aresta $(recente, v)$ e tais que $final(v) = \text{falso}$: a, c

v = a: $rotulo = dist(recente) + w_{recente,a} = 4 + 1 < 7 = dist(a)$

$dist(a) = 5$

$pred(a) = b$

$$\mathbf{v = c: rotulo} = dist(recente) + w_{recente,c} = 4 + 3 < 9 = dist(c)$$

$$dist(c) = 7$$

$$pred(b) = b$$

Vértice y com menor rótulo temporário t.q. $dist(y) \neq \infty$: a

$$final(a) = \text{verdadeiro}$$

$$recente = a$$

it = 3

Vértices v tais que existe a aresta $(recente, v)$ e tais que $final(v) = \text{falso}$: t

$$\mathbf{v = t: rotulo} = dist(recente) + w_{recente,t} = 5 + 6 < \infty = dist(t)$$

$$dist(t) = 11$$

$$pred(t) = a$$

Vértice y com menor rótulo temporário t.q. $dist(y) \neq \infty$: c ou d

$$final(c) = \text{verdadeiro}$$

$$recente = c$$

it = 4

Vértices v tais que existe a aresta $(recente, v)$ e tais que $final(v) = \text{falso}$: d, t

$$\mathbf{v = d: rotulo} = dist(recente) + w_{recente,d} = 7 + 1 \not< 7 = dist(d)$$

$$\mathbf{v = t: rotulo} = dist(recente) + w_{recente,t} = 7 + 3 < 11 = dist(t)$$

$$dist(t) = 10$$

$$pred(t) = c$$

Vértice y com menor rótulo temporário t.q. $dist(y) \neq \infty$: d

$$final(d) = \text{verdadeiro}$$

$$recente = d$$

it = 5

Vértices v tais que existe a aresta $(recente, v)$ e tais que $final(v) = \text{falso}$: t

$\mathbf{v = t}$: $rotulo = dist(recente) + w_{recente,d} = 7 + 5 \not< 10 = dist(t)$

Vértice y com menor rótulo temporário t.q. $dist(y) \neq \infty$: t

$final(t) = \text{verdadeiro}$

$recente = t$

Como $final(t) = \text{verdadeiro}$, **pare**

Qual é o valor do menor caminho? O comprimento deste caminho é $dist(t) = 10$. Mas, qual é este caminho? Temos que:

$t, pred(t)$

$t, c, pred(c)$

$t, c, b, pred(b)$

$t, c, b, s, pred(s)$

$t, c, b, s, -1$

O menor caminho é $\{s, b, c, t\}$.

E se quisermos o menor caminho entre s e c ? Podemos aproveitar os cálculos anteriores. Como c possui rótulo permanente, temos que $dist(c) = 7$. E o caminho é:

$c, pred(c)$

$c, b, pred(b)$

c, b, s

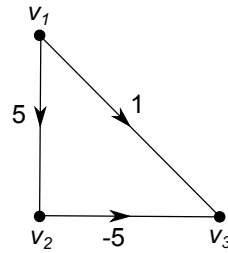
O menor caminho é então: $\{s, b, c\}$.

Observação 10.6. 1. A complexidade em termos de tempo computacional do algoritmo acima é dada por:

O laço principal deste algoritmo, no pior caso, é executado $n - 1$ vezes. Isto acontece quando o vértice final, t , é o último a receber um rótulo permanente. Para cada execução deste laço, precisamos examinar uma linha da matriz de pesos, e atualizar os vetores $dist$ e $pred$, ou seja, um tempo proporcional a n . Assim o tempo total é da ordem $2n(n - 1)$. A complexidade é $O(n^2)$.

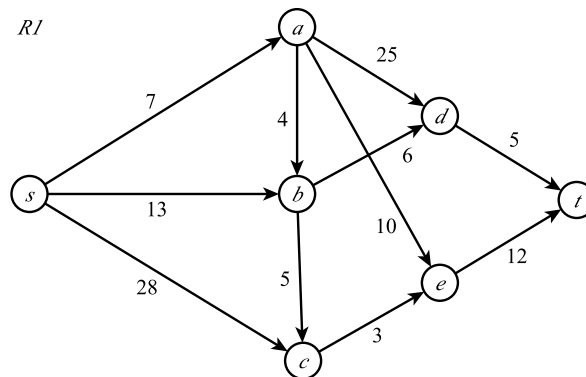
Observe que independe do número de arestas no grafo.

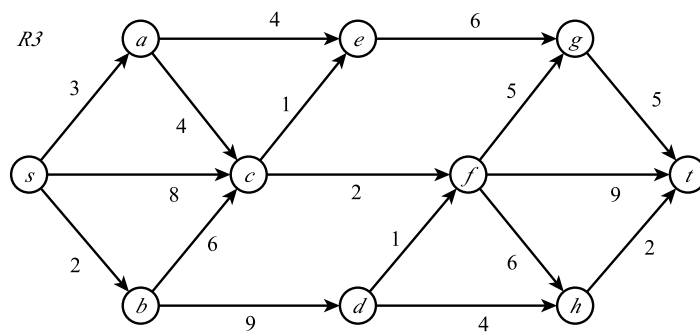
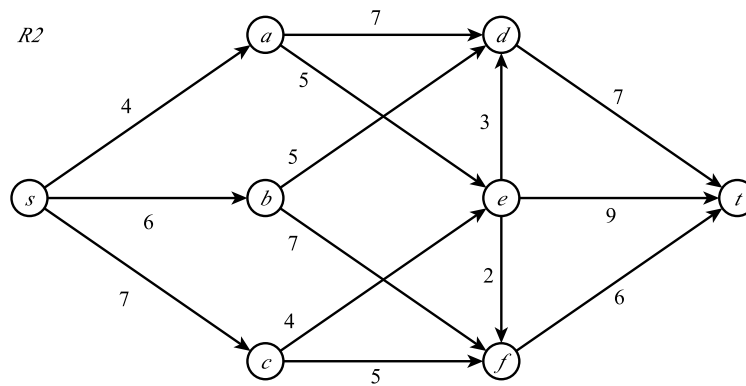
2. É possível, usando o algoritmo de Dijkstra encontrar o menor caminho entre o vértice s e todos os outros vértices do grafo. O que deve ser modificado?
3. Outros Algoritmos para problemas de Caminho Mínimo em grafos podem ser encontrados por exemplo em: [Goldbarg, M. e E. Goldbarg, Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações, Elsevier, 2012].
4. O algoritmo de Dijkstra funciona apenas se $w_{ij} \geq 0$ para todos i, j . Verifique este fato aplicando o algoritmo à seguinte rede para encontrar o menor caminho entre v_1 e v_3 :



Exercícios:

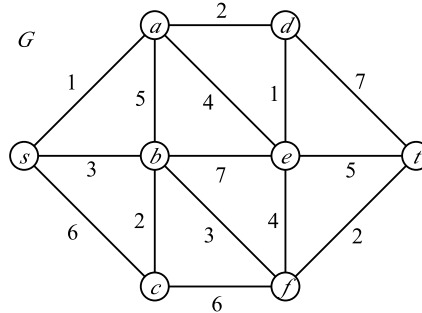
1. Encontre o caminho mínimo entre os vértices S e T nas seguintes redes R_1 , R_2 e R_3 abaixo:





2. Modifique o algoritmo de Dijkstra para que seja possível usá-lo na determinação dos menores caminhos do vértice S a todos os outros vértices do grafo.

3. Encontre a menor distância de S a cada um dos outros vértices no grafo valorado G abaixo.



4. Uma companhia possui filiais em cinco cidades A , B , C , D e E . As tarifas para vôos diretos entre estas cidades são dadas na tabela abaixo:

	A	B	C	D	E
A	–	50	40	25	10
B	50	–	20	90	25
C	40	20	–	10	25
D	25	90	10	–	55
E	10	25	25	55	–

Qual é o custo de viajar entre cada par de cidades pela rota de menor custo?

5. Abaixo, temos uma tabela de distâncias entre uma Merceria e as localidades onde ela faz entregas. Use o algoritmo de Dijkstra para descobrir qual o menor caminho da Merceria a todas as outras localidades.

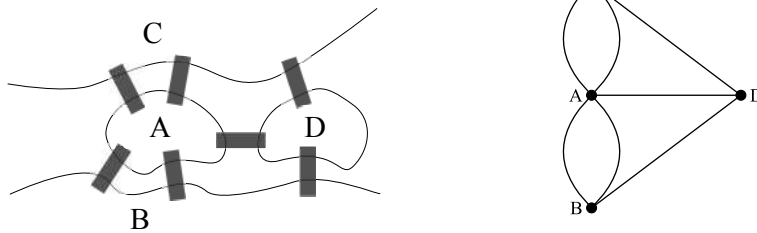
	Merceria	B	C	D	E	F	G	H
Merceria	0	11	5	8	∞	∞	∞	∞
B	11	0	∞	3	∞	∞	8	∞
C	5	∞	0	2	8	∞	∞	∞
D	8	3	2	0	4	∞	12	11
E	∞	∞	8	4	0	15	∞	4
F	∞	∞	∞	∞	15	0	3	7
G	∞	8	∞	12	∞	3	0	2
H	∞	∞	∞	11	4	7	2	0

6. Modifique o algoritmo de Dijkstra para que seja possível usá-lo na determinação do caminho máximo entre um dado par de vértices.
7. Encontre o caminho máximo entre os vértices S e T nas redes R_1 e R_2 acima.

Capítulo 11

Grafos Eulerianos

No início do curso nós estudamos o problema das Pontes de Königsberg e representamos o problema através do seguinte grafo::



Queríamos saber se é possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar e passando por cada uma das pontes apenas uma vez.

Em outras palavras queríamos encontrar no grafo acima um trajeto fechado que incluísse todas as arestas do grafo.

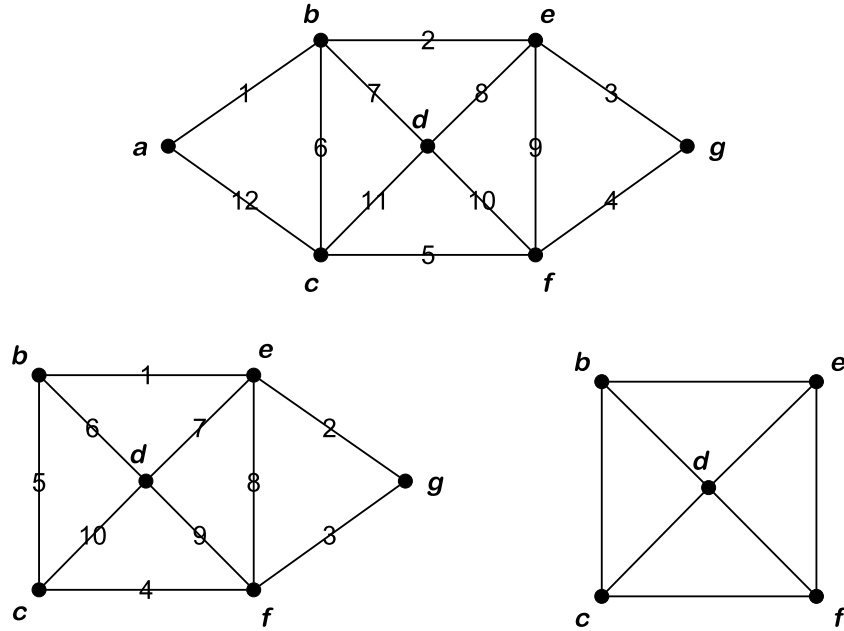
Definição 11.1. Um trajeto que inclua todas as arestas de um dado grafo $G(V, A)$ é chamado de **trajeto euleriano**.

Seja G um grafo conexo. Dizemos que G é **euleriano** se possui um trajeto euleriano fechado.

Um grafo G não-euleriano é dito ser **semi-euleriano** se possui um trajeto euleriano.

Observação 11.2. Note que em um grafo euleriano cada aresta é percorrida uma, e uma única, vez.

Exemplo 11.3. A seguir temos exemplos de grafos euleriano, semi-euleriano e não-euleriano:



Abaixo temos um resultado auxiliar.

Lema 11.4. Se $G(V, A)$ é um grafo tal que $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V$, então G contém um ciclo.

Demonstração. Se G possui laços ou arestas paralelas, não há o que provar.

Vamos supor que G é um grafo simples. Seja $v_0 \in V$ um vértice arbitrário de G . Como $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V$, podemos construir um passeio $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \cdots$ indutivamente, escolhendo v_{i+1} como sendo qualquer vértice adjacente a v_i exceto v_{i-1} .

Como G possui uma quantidade finita de vértices, em algum momento escolheremos algum vértice, digamos v_k , pela segunda vez.

A parte do passeio entre a primeira e a segunda ocorrência de v_k constitui um ciclo. \square

Teorema 11.5 (Condição necessária e suficiente, Euler (1736)). Um grafo conexo $G(V, A)$ é euleriano se, e somente se, o grau de cada vértice de G é par.

Demonstração. (\Rightarrow) Seja T um trajeto euleriano fechado de G . Cada vez que um vértice v ocorre no trajeto T , há uma contribuição de duas unidades para o grau de v (uma aresta para chegar a v e outra para sair).

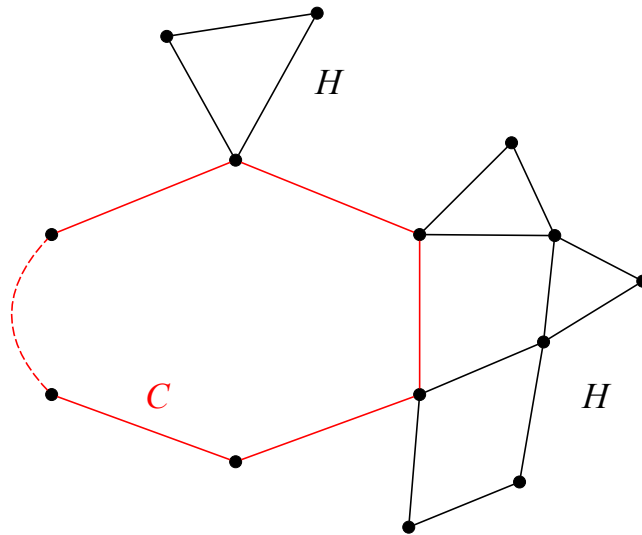
Isto vale não só para os vértices intermediários mas também para o vértice final, pois “saímos” e “entramos” no mesmo vértice no início e no final do trajeto.

Como cada aresta ocorre exatamente uma vez em T , cada vértice possui grau par.

(\Leftarrow) A prova é por indução no número de arestas de G . Suponhamos que o grau de cada vértice de G é par. Como G é conexo, $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V$. Segue então do lema anterior que G contém um ciclo C .

Se C contém todas as arestas de G , o teorema está provado.

Se não, removemos de G as arestas de C , resultando num grafo H , possivelmente desconexo, com menos arestas do que G .



É fácil ver que todos os vértices de H possuem grau par. Logo, pela hipótese de indução, cada componente de H possui um trajeto euleriano fechado.

Além disso, pela conexidade de G , cada componente de H possui ao menos um vértice em comum com C .

Portanto, concatenando os trajetos eulerianos fechados de cada

componente de H com o ciclo C obtemos um trajeto euleriano fechado em G , ou seja, G é um grafo euleriano. \square

Corolário 11.6. *Um grafo conexo é euleriano se, e somente se, ele pode ser decomposto em circuitos disjuntos:*

$$G = \bigcup_i C_i, \quad C_i \cap C_j = \text{grafo nulo.}$$

Demonstração. Exercício. \square

Corolário 11.7. *Um grafo conexo é semi-euleriano se, e somente se, possui exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Exercício. \square

11.1 Algoritmo de Decomposição (Hierholzer, 1873)

Considere um grafo conexo $G(V, A)$, onde $d(v)$ é par $\forall v \in V$.

Passo 1: Determine um circuito C_1 em G .

Defina $T_1 = C_1$ e $G_1 = G$.

Se T_1 possui todas as arestas de G , pare. T_1 é o trajeto procurado.

Tome $k = 1$.

Passo 2: Faça $k = k + 1$. Construa o subgrafo $G_k(\bar{V}_k, \bar{A}_k)$ removendo de G_{k-1} as arestas pertencentes a $T_{k-1}(V_{k-1}, A_{k-1})$. Remova de G_k os vértices isolados.

Passo 3: Determine um vértice $v \in \bar{V}_k \cap V_{k-1}$. A partir de v determine um circuito C_k em G_k .

Passo 4: Determine $T_k = T_{k-1} \cup C_k$.

Se T_k possui todas as arestas de G , vá para o Passo 5.

Caso Contrário, retorne ao Passo 2.

Passo 5: Pare. T_k é o trajeto procurado e $G = \bigcup_{i=1}^k C_i$.

11.2 Algoritmo de Fleury (Fleury, 1883)

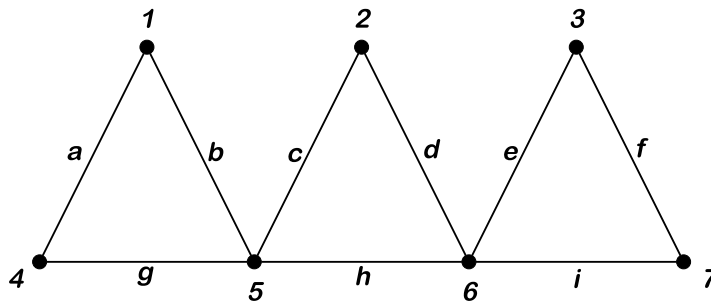
Considere um grafo conexo $G(V, A)$, onde $d(v)$ é par $\forall v \in V$.

Comece em qualquer vértice v e percorra as arestas de forma aleatória, seguindo sempre as seguintes regras:

- Exclua as arestas depois de passar por elas;
- Exclua os vértices isolados, caso ocorram;
- Passe por uma ponte¹ somente se não houver outra alternativa.

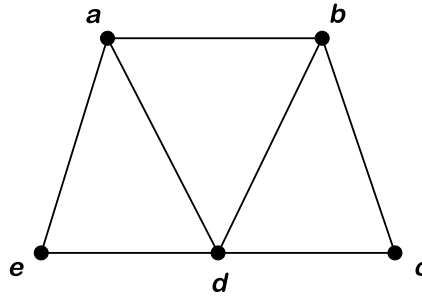
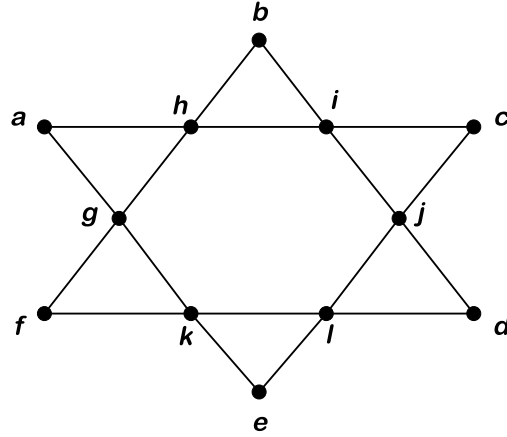
Exercícios

1. Aplicar o Algoritmo de Fleury para encontrar um trajeto euleriano no grafo abaixo a partir do vértice 5.



2. Verifique se os grafos abaixo são eulerianos. Se possível, exiba um trajeto euleriano.

¹Uma aresta é dita ser uma **ponte** se a sua remoção torna o grafo desconexo.



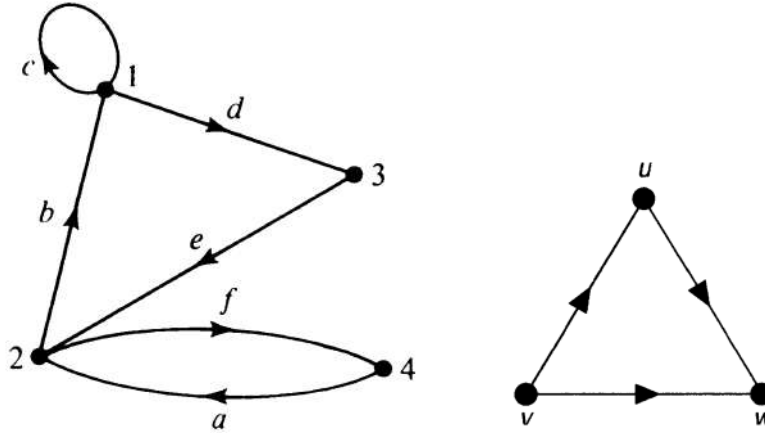
11.3 Digrafos Eulerianos

Definição 11.8. Um trajeto *orientado* que inclua todas as arestas de um dado digrafo $G(V, A)$ é chamado de **trajeto euleriano**.

Seja G um digrafo conexo (fortemente ou fracamente). Dizemos que G é **euleriano** se possui um trajeto euleriano fechado.

Um digrafo G não-euleriano é dito ser **semi-euleriano** se possui um trajeto euleriano.

Exemplo 11.9. Abaixo temos um grafo euleriano à esquerda e um grafo não-euleriano à direita:



Teorema 11.10 (Teorema de Euler para digrafos). *Um digrafo $D(V, A)$ é euleriano se, e somente se, D é balanceado (i.e., $d_e(v) = d_s(v) \forall v \in V$).*

Demonstração. Exercício. □

Corolário 11.11. *Um digrafo $D(V, A)$ é semi-euleriano se, e somente se, existem dois vértices $x, y \in V$ tais que*

$$d_s(x) - d_e(x) = 1, \quad d_e(y) - d_s(y) = 1$$

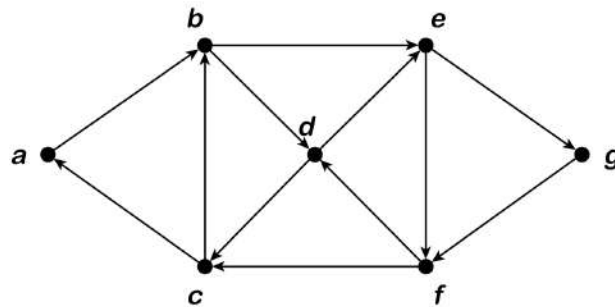
e

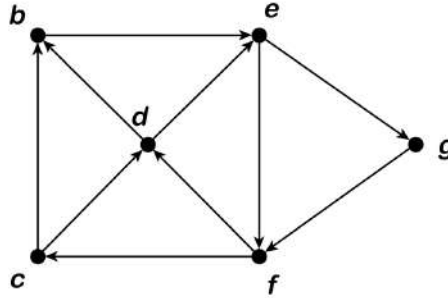
$$d_e(v) = d_s(v) \forall v \in V \setminus \{x, y\}.$$

Demonstração. Exercício. □

Exercício

- Determine se os grafos abaixo são eulerianos ou semi-eulerianos (em caso positivo, exiba os trajetos euleriano e semi-euleriano).





2. Mostre que um digrafo euleriano é necessariamente fortemente conexo.
3. Exiba um contra-exemplo para mostrar que nem todo digrafo fortemente conexo é euleriano.

11.4 O Problema do Carteiro Chinês

O Problema do Carteiro Chinês foi postulado em 1962 pelo matemático chinês Mei-Ku Kwan:

Considere um grafo valorado (ou rede) G tal que os pesos das arestas são não-negativos. Encontre um passeio fechado que percorra todas as arestas de G com peso total mínimo.

Aplicações:

1. Coleta de lixo;
2. Entregas;
3. Limpeza de ruas;
4. Checagem de páginas da internet:

Exemplo de [Maarten van Steen, Graph Theory and Complex Networks]

***Checking a Web site:** Typically, a Web site consists of numerous pages, in turn containing links to each other. As is so often the case, most Web sites are notoriously poor at having their links maintained to the correct pages. This is often due to the simple*

reason that so many people are responsible for maintaining their part of a site. Apart from links that are broken (i.e., refer to nonexisting pages), it is often necessary to manually check how pages are linked to each other.

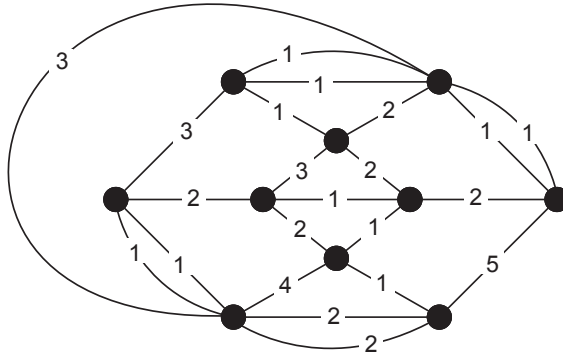
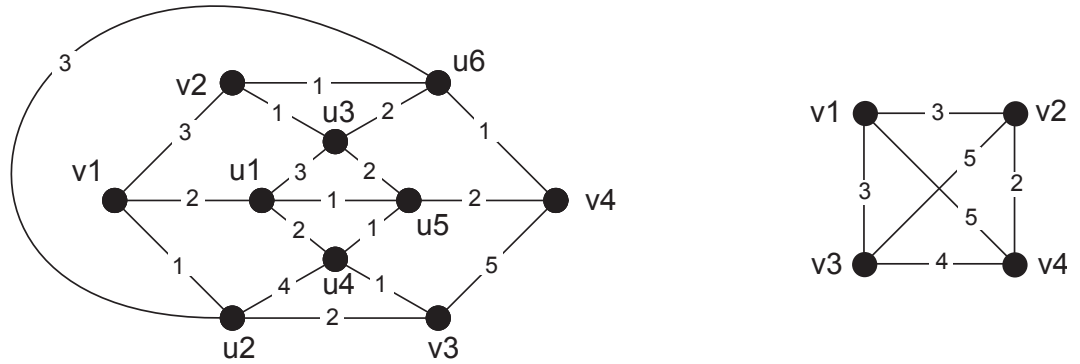
Graph theory can help by modeling a Web site as an undirected graph where a page is represented by a vertex and a link by an edge having weight 1. Note that we are not using a directed graph, as we may need to cross a link in reverse order, for example, when going back to the original page. If a site is to be manually inspected, then we are seeking a solution to navigate through a site, but with preferably crossing a link at most once. This is now the same as finding a directed walk containing all edges of minimal length.

11.4.1 Algoritmo (Gibbons, 1985)

Considere um grafo valorado conexo G em que o conjunto de vértices de grau ímpar é $V_{\text{ímpar}} = \{v_1, \dots, v_{2k}\}$, onde $k \geq 1$.

1. Para cada par $(v_i, v_j) \in V_{\text{ímpar}} \times V_{\text{ímpar}}$ com $v_i \neq v_j$, encontre o caminho mínimo $P_{i,j}$ entre v_i e v_j .
2. Construa um grafo completo com os $2k$ vértices de $V_{\text{ímpar}}$ em que o peso da aresta (v_i, v_j) é o peso do caminho mínimo $P_{i,j}$.
3. Determine o conjunto $E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ de k arestas do grafo completo, duas a duas não-adjacentes, tal que a soma de seus pesos seja mínima.
4. Para cada aresta $e = (v_i, v_j) \in E$, duplique as arestas de $P_{i,j}$ em G .

Exemplo 11.12. *Exemplo de [Maarten van Steen, Graph Theory and Complex Networks]:*

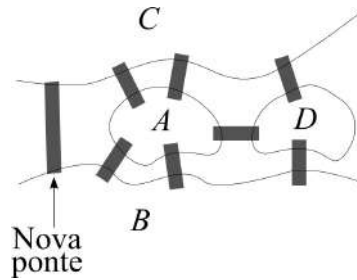


Exercícios

Lista baseada na referência

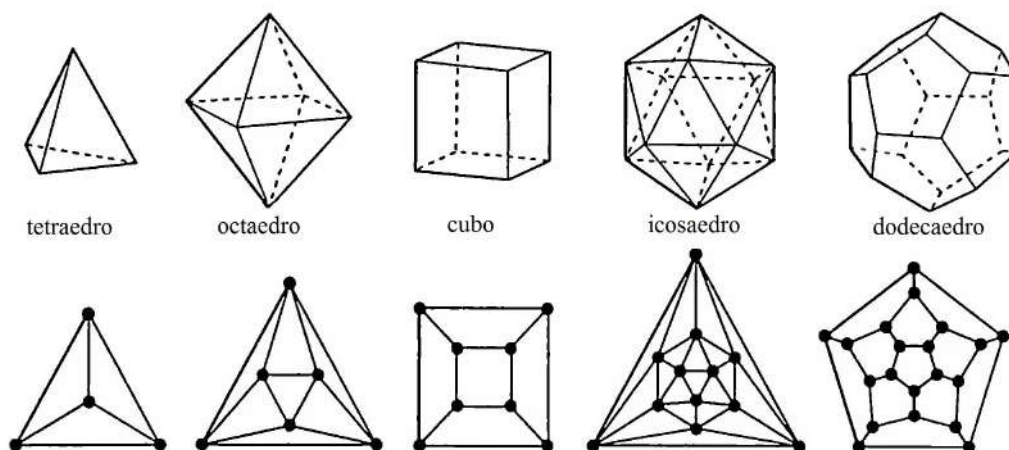
R.J. Wilson and J.J. Watkins, *Graphs – An Introductory Approach*, J. Wiley, 1990 (vide ref. [26]).

1. Foi relatado em 1875 por L. Saalsschütz que um ponte extra foi construída em Königsberg, unindo as áreas *B* e *C*:

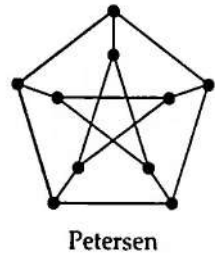
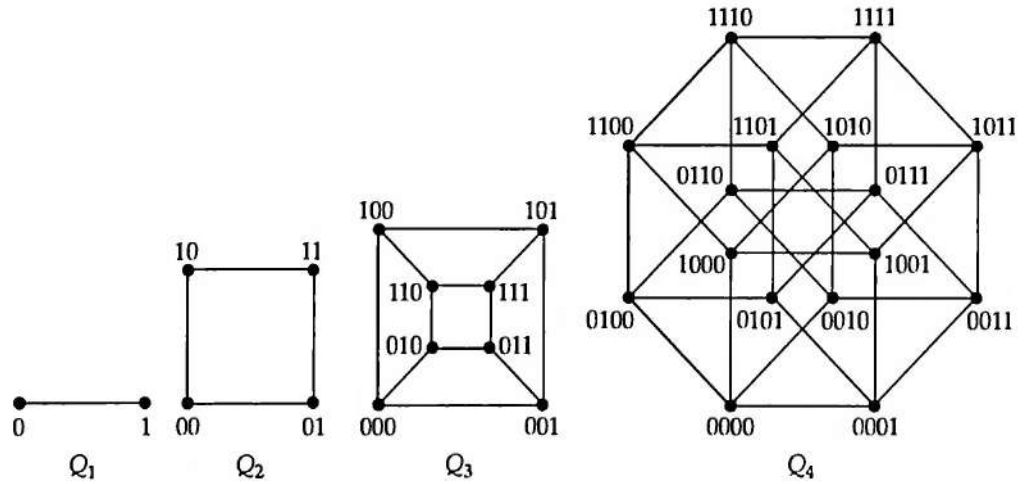


Com essa alteração, agora é possível encontrar um trajeto Euleriano?

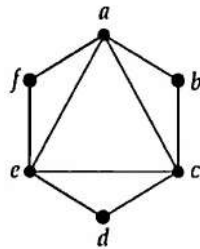
2. Mostre que os cidadãos de Königsberg poderiam ter construído duas novas pontes de maneira que eles pudessem realizar o *tour* retornando ao ponto de partida.
3. Quais dos seguintes grafos são Eulerianos?
 - (a) os grafos completos K_n ;
 - (b) os grafos completos bipartidos $K_{r,s}$;
 - (c) os grafos ciclo C_n ;
 - (d) os cinco Grafos Platônicos (veja figura a seguir);
 - (e) os grafos cubo Q_n (veja figura a seguir)²;
 - (f) o grafo de Petersen (veja figura a seguir).



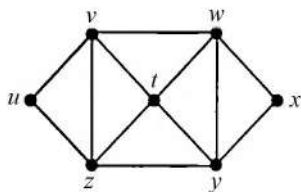
²Um cubo de dimensão n , ou n -cubo, é o grafo Q_n definido da seguinte maneira: os vértices do grafo são todas as seqüências $b_1b_2 \dots b_n$ em que cada b_i pertence a $\{0, 1\}$; dois vértices são adjacentes se diferem em exatamente uma posição.



4. Identifique cinco ciclos no grafo Euleriano abaixo. Mostre que o grafo pode ser dividido em ciclos dois a dois aresta-disjuntos. Como estes ciclos podem ser recombinaados de modo a formar um trajeto Euleriano?

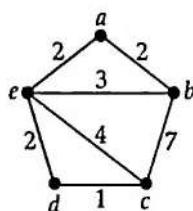


5. Mostre que o grafo Euleriano abaixo pode ser dividido em quatro ciclos dois a dois aresta-disjuntos. Como estes ciclos podem ser recombinaados de modo a formar um trajeto Euleriano?

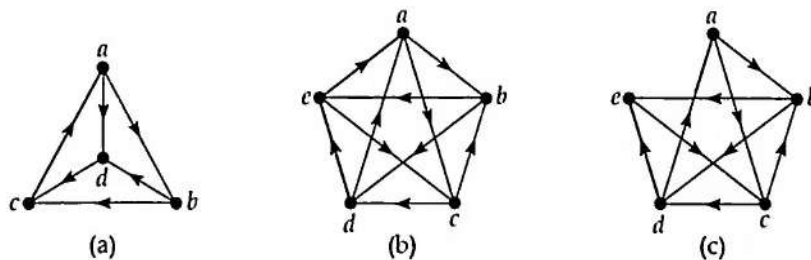


6. Use o algoritmo de Fleury para encontrar um trajeto Euleriano iniciando com $\{u, v, z\}$ no grafo do exercício anterior.

7. Resolva o Problema do Carteiro Chinês para o seguinte grafo:

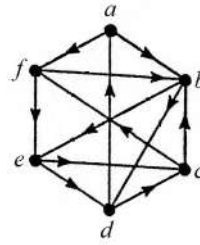


8. Determine quais dos seguintes digrafos são Eulerianos ou Semi-Eulerianos,³ e dê um trajeto adequado em cada caso.



9. Determine se o seguinte digrafo é Euleriano ou semi-Euleriano, e dê um trajeto adequado.

³Possuem um trajeto (não necessariamente fechado) envolvendo todas as arestas.

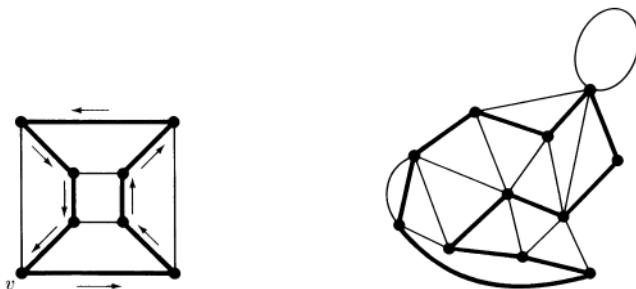


Capítulo 12

Grafos Hamiltonianos

Um trajeto euleriano é caracterizado pelo fato de incluir todas as arestas de um dado grafo, uma única vez.

Entretanto os vértices podem se repetir em um trajeto euleriano. Surge então a questão da possibilidade de se obter um trajeto fechado (não necessariamente euleriano) que inclua cada vértice uma única vez¹; como por exemplo, nos grafos abaixo:



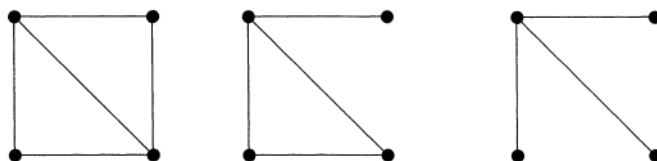
Definição 12.1. Um *circuito hamiltoniano* em um grafo conexo é um circuito que contém todos os vértices do grafo.

Um grafo é chamado de **grafo hamiltoniano** se possui um circuito hamiltoniano.

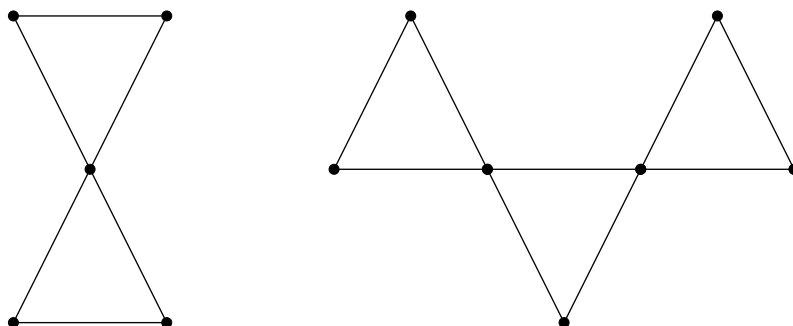
Um grafo não-hamiltoniano é **semi-hamiltoniano** se possui um caminho que contém todos os seus vértices.

Exemplos: Abaixo temos um grafo hamiltoniano à esquerda, um grafo semi-hamiltoniano no centro e um grafo não semi-hamiltoniano (e, portanto, não hamiltoniano) à direita.

¹Neste caso o trajeto será, na verdade, um circuito (com n arestas).



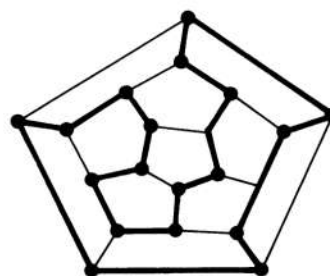
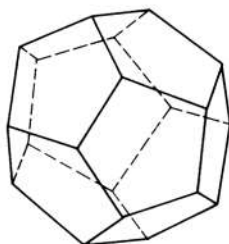
Os grafos abaixo não são hamiltonianos. Por que?



Quais são as condições necessárias e suficientes para definir se um grafo é hamiltoniano?

Esta é uma questão em aberto e foi formulada pelo matemático Sir William Hamilton em 1859.

Dodecahedron

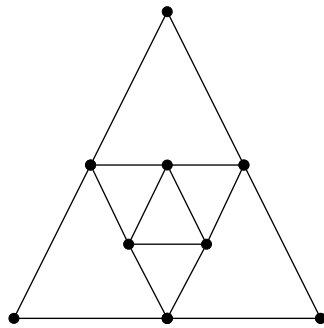


Algumas considerações podem ser feitas:

1. Arestas paralelas e laços não podem pertencer a um circuito hamiltoniano.
2. Se um vértice possui grau 2, as arestas a ele incidentes devem pertencer ao circuito hamiltoniano.

3. Nenhum subcircuito próprio, isto é, um circuito que não possui todos os vértices de G , pode ser formado durante a construção do circuito hamiltoniano.
4. Um vez incluído um vértice, todas as arestas a ele incidentes e que não foram inseridas no circuito podem ser desconsideradas.

Exercício: Verificar se o grafo abaixo é hamiltoniano:



Condição necessária e suficiente?

No caso de grafos eulerianos temos uma condição necessária e suficiente. Porém, para grafos hamiltonianos não há. Na verdade, sabe-se pouco em geral sobre grafos hamiltonianos. A maioria dos teoremas são da forma: “Se G possui arestas suficientes, então G é hamiltoniano”. Os dois teoremas mais celebrados estão enunciados a seguir.

Teorema 12.2 (Teorema de Ore, 1960). *Se $G(V, A)$ é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices, e se*

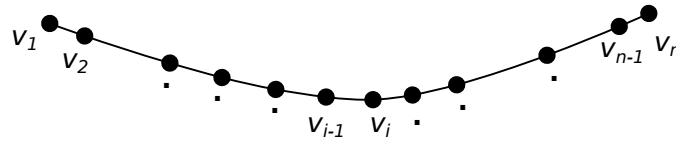
$$d(v) + d(w) \geq n$$

para cada par de vértices não-adjacentes v e w , então G é hamiltoniano.

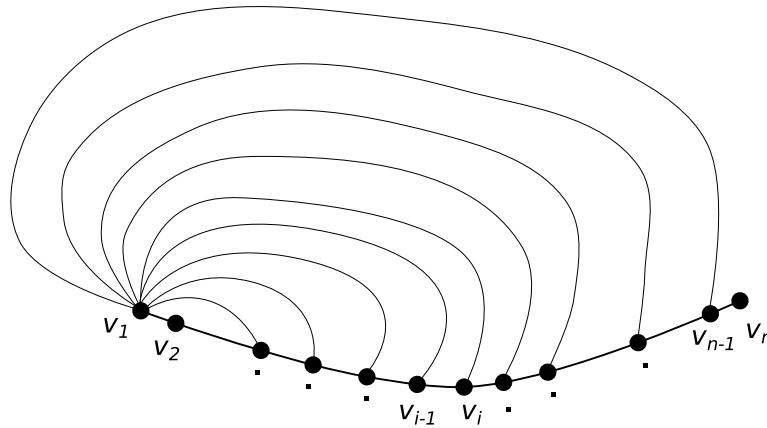
Demonstração. Procederemos por contradição. Suponha que G não é hamiltoniano, mas satisfaz a hipótese. Vamos supor ainda que G é “quase hamiltoniano”, no sentido de que a adição de qualquer outra aresta torna-o hamiltoniano. Se este não for o caso, adicionamos arestas extras até que o seja. Observe que a adição de arestas não quebra a hipótese.

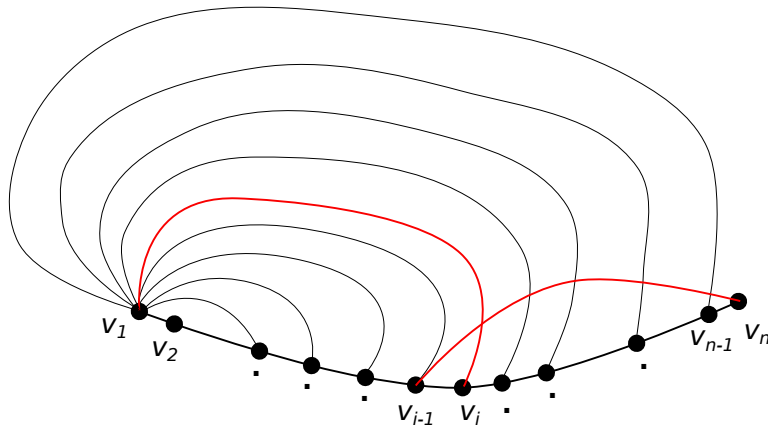
Sejam $v, w \in V$ vértices não-adjacentes (existe pelo menos um par, caso contrário, G seria completo e, por conseguinte, hamiltoniano). Logo, a adição da aresta (v, w) torna G hamiltoniano, o que implica na existência de um caminho passando por todos os vértices:

$$v = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_n = w.$$



Por hipótese, $d(v_1) + d(v_n) \geq n$, ou seja, existe um conjunto E com ao menos outras $n - 2$ arestas incidentes em $\{v_1, v_n\}$. Logo, existem vértices v_i e v_{i-1} tais que v_i é adjacente a v_1 e v_{i-1} é adjacente a v_n . De fato, se todas as arestas de E incidem, digamos, em v_1 , teríamos ao menos um par de arestas paralelas, contradizendo o fato de G ser simples. Similarmente se todas incidem em v_n . Veja a figura.





Mas neste caso, temos um circuito hamiltoniano:

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_n \rightarrow v_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i+1} \rightarrow v_i \rightarrow v_1,$$

em contradição à suposição de que G não é hamiltoniano. \square

Teorema 12.3 (Teorema de Dirac, 1952). *Se G é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices, e se*

$$d(v) \geq \frac{n}{2}$$

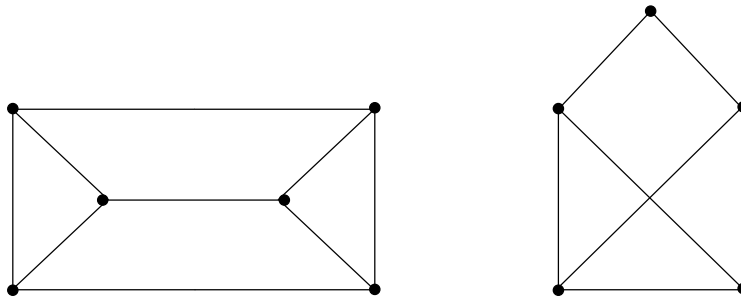
para cada vértice v , então G é hamiltoniano.

Demonstração. Temos que

$$d(v) + d(w) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

para cada par de vértices v e w (adjacentes ou não-adjacentes). Segue do Teorema de Ore que G é hamiltoniano. \square

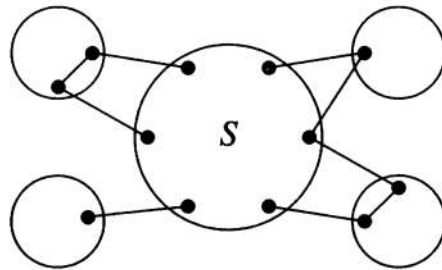
Exercício: Verificar os dois teoremas através dos seguintes grafos:



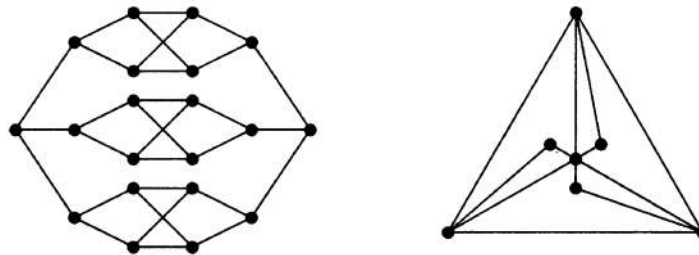
Condição Necessária

Teorema 12.4. *Se $G(V, A)$ é um grafo hamiltoniano, então para todo subconjunto não-vazio, $S \subseteq V$, o grafo $G - S$ possui no máximo $|S|$ componentes.*

Demonstração. Sejam $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, e C um ciclo hamiltoniano de G . Ao percorrer as arestas de C , quando passamos por um componente de $G - S$, ao deixar este componente temos, necessariamente, que passar por algum vértice de S . A cada passagem por um componente de $G - S$ temos que usar um vértice diferente de S ao deixarmos o componente. Consequentemente, a quantidade de vértices de S deve ser maior ou igual ao número de componentes de $G - S$. \square



Exemplos: Abaixo à esquerda temos um grafo que não satisfaz a condição necessária do teorema acima e, portanto, não é hamiltoniano. O grafo à direita, satisfaz a condição necessária, mas não é hamiltoniano (pois ao incluir as arestas dos vértices de grau igual a dois, teremos incluído três arestas incidentes no vértice central e, obviamente, em um ciclo não temos vértices de grau 3). Vemos então que a condição é apenas necessária, ou seja, não é suficiente para garantir a existência do circuito hamiltoniano.

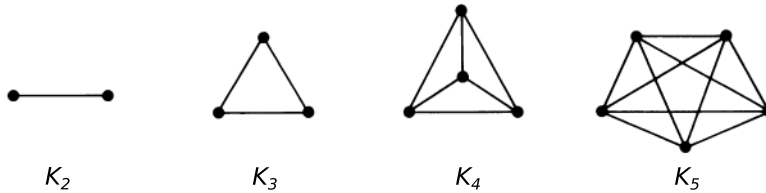


Para que tipo de grafo podemos garantir a existência de um circuito hamiltoniano?

Definição 12.5. Um **grafo completo** é um grafo simples tal que existe uma aresta entre cada par de vértices.

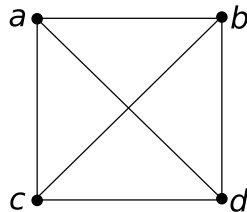
Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n .

Exemplos:



Como obter um circuito hamiltoniano em um grafo completo K_n , com $n \geq 3$? Numere os vértices do grafo de 1 a n . Como existe uma aresta entre cada par de vértices, a sequência $1, 2, \dots, n$ é um circuito hamiltoniano.

Quantos circuitos hamiltonianos um grafo completo possui? Vamos examinar o K_4 :



Os circuitos $\{a, b, c, d, a\}$ e $\{a, d, c, b, a\}$ são diferentes ou iguais? Partindo do vértice 1, temos $n - 1$ escolhas de arestas para fazer. Em seguida, a partir do vértice 2, temos $n - 2$ arestas para escolher; e assim por diante até a escolha da última aresta. Ou seja, há $(n - 1)!$ possibilidades; e se considerarmos que circuitos do tipo $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_{i_1}\}$ são iguais ao circuito $\{v_{i_1}, v_{i_n}, v_{i_{n-1}}, \dots, v_{i_2}, v_{i_1}\}$, teremos que o número total de circuitos é dado por $(n - 1)!/2$.

Teorema 12.6. Em um grafo completo com n vértices existem $(n - 1)!/2$ circuitos hamiltonianos aresta-disjuntos, se $n \geq 3$ é ímpar.

Demonstração. Ver página 33 de [N. Deo, Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall, 1974]. \square

12.1 O Problema do Caixeiro Viajante

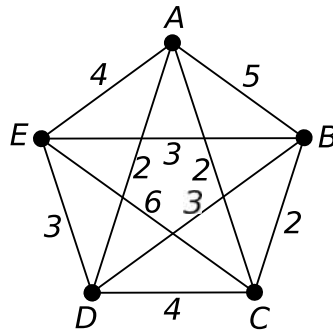
Colocação do Problema

Um viajante necessita visitar um certo número de cidades durante uma viagem e retornar ao lugar de origem de tal maneira que cada cidade é visitada exatamente uma vez e que a distância total percorrida seja a menor possível. Dada a distância entre as cidades, que rota ele deve escolher?

Como resolver este problema?

Vamos representar o problema acima através de um grafo valorado. Seja V o conjunto de cidades, A o conjunto das estradas interligando as cidades e o valor de cada aresta como sendo a distância entre as respectivas cidades.

Vamos supor que o viajante deseja visitar 5 cidades cujas estradas existentes entre cada par de cidades estejam representadas através do seguinte grafo:



Em princípio, este problema pode ser resolvido determinando-se todas as rotas possíveis e escolhendo a que resultar na menor distância percorrida.

Neste exemplo, uma possível rota é dada por: $\{A, B, C, D, E, A\}$ cuja distância é $5 + 2 + 4 + 3 + 4 = 18km$.

A rota ótima é: $\{A, C, B, E, D, A\}$ cuja distância é $12km$.

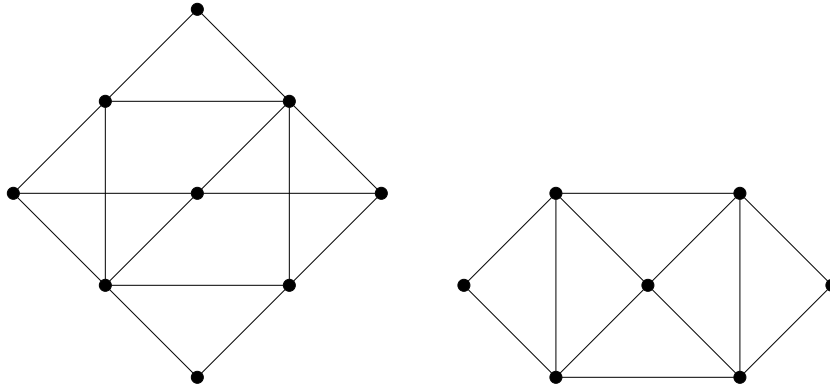
Esta técnica é eficiente?

Considere que o problema que envolva 10 cidades. O número máximo de possíveis rotas seria de $9! = 362.880$. Uma máquina equipada

com um programa que conseguisse examinar 1 milhão de rotas por segundo levaria 0,36s para encontrar a melhor rota. Se dobrássemos o número de cidades, teríamos que examinar $19! = 1,22 \times 10^{17}$ rotas e o mesmo programa levaria aproximadamente 3.800 anos para encontrar a melhor rota!

Exercícios:

1. Quais dos grafos abaixo é hamiltoniano e/ou euleriano? Exiba um circuito hamiltoniano e/ou trajeto euleriano em caso positivo.



2. Dê um exemplo de um grafo não hamiltoniano com n vértices tal que $d(v) \geq (n - 1)/2$.
3. Dê um exemplo de um grafo hamiltoniano que não satisfaça o Teorema de Dirac.
4. Dê um exemplo de um grafo que seja euleriano e hamiltoniano.

12.2 Digrafos Hamiltonianos

Definição 12.7. Um digrafo D é dito ser **hamiltoniano** se possuir um circuito orientado que inclua todos os seus vértices.

Um digrafo não-hamiltoniano é dito ser **semi-hamiltoniano** se possuir um caminho orientado que inclua todos os seus vértices.

Pouco sabe-se sobre digrafos hamiltonianos.

Muitos teoremas para grafos hamiltonianos não são generalizados facilmente para digrafos.

Teorema 12.8 (Teorema de Dirac (para digrafos)). *Seja D um digrafo simples com n vértices. Se*

$$d_s(v) \geq \frac{n}{2} \quad e \quad d_e(v) \geq \frac{n}{2}$$

para todo vértice v de D , então D é hamiltoniano.

Teorema 12.9 (Teorema de Ore (para digrafos)). *Seja D um digrafo simples com n vértices. Se*

$$d_s(v) + d_e(w) \geq n$$

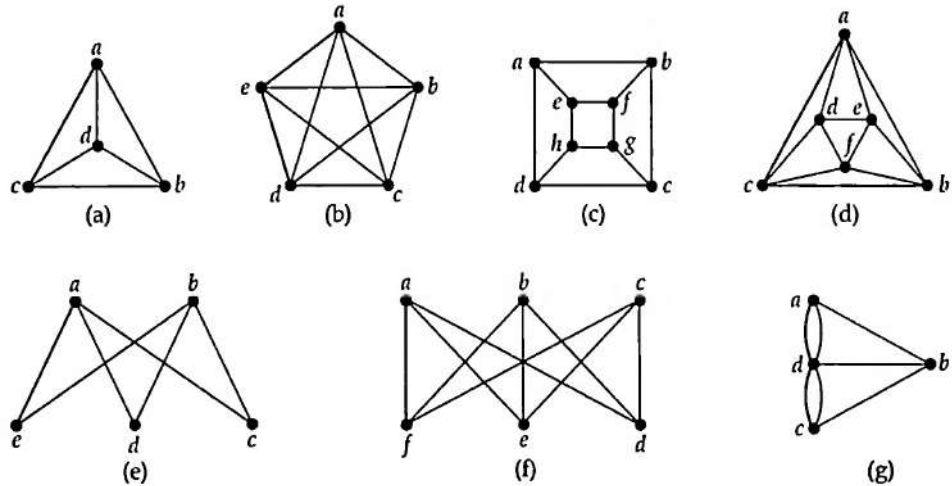
para todo par de vértices não-adjacentes v e w de D , então D é hamiltoniano.

Exercícios

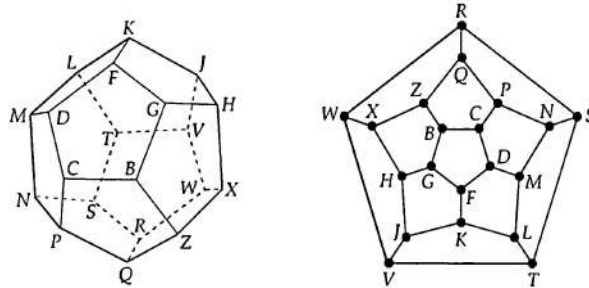
Lista baseada na referência

R.J. Wilson and J.J. Watkins, *Graphs – An Introductory Approach*, J. Wiley, 1990 (vide ref. [26]).

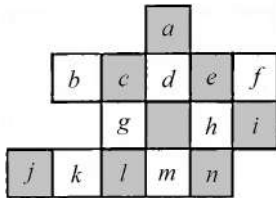
1. Decida quais dos seguintes grafos são Eulerianos ou Hamiltonianos, ou ambos, e dê um trajeto Euleriano ou um ciclo Hamiltoniano quando possível.



2. Dê um exemplo com no máximo seis vértices de cada um dos seguintes itens:
 - (a) um grafo Hamiltoniano que não é Euleriano;
 - (b) um grafo Euleriano que não é Hamiltoniano.
3. Determine quantos ciclos Hamiltonianos no dodecaedro abaixo começam com as letras $DCPQZ$.



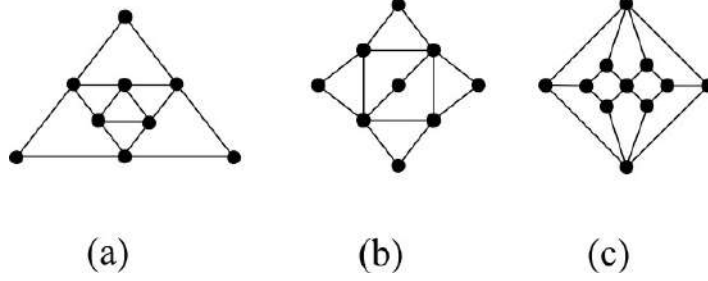
4. Use a figura acima para responder o seguinte:
 - (a) quantos ciclos Hamiltonianos no dodecaedro iniciam com $JVTSR$?
 - (b) encontre um caminho no dodecaedro iniciando com BCD , terminando com T , e incluindo todo vértice uma única vez.
5. Desenhe o grafo correspondente aos movimentos do cavalo no tabuleiro abaixo. Determine se o cavalo pode visitar cada quadrado exatamente uma vez.



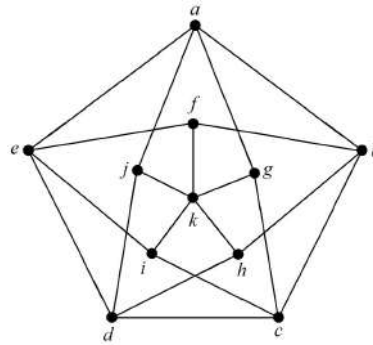
6. Quais dos seguintes grafos são Hamiltonianos?
 - (a) os grafos completos K_n ;
 - (b) os grafos completos bipartidos $K_{r,s}$;
 - (c) árvores;

(d) os cinco grafos Platônicos.

7. Decida se cada um dos seguintes grafos é Hamiltoniano, Semi-Hamiltoniano² ou nenhuma das opções.

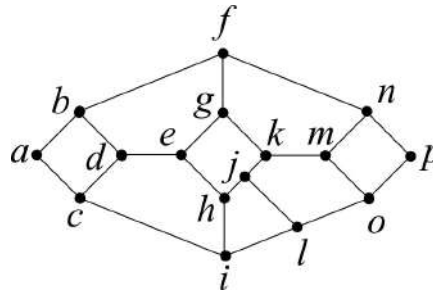


8. Seja G o seguinte grafo:



- (a) Prove que G não possui nenhum ciclo Hamiltoniano que inclua as arestas ab , bf e fk ;
- (b) Encontre um ciclo Hamiltoniano contendo as arestas ab e bf .

9. Seja G o seguinte grafo:

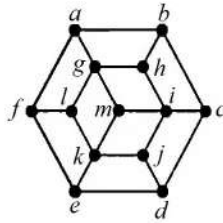


²Possuem um caminho (não necessariamente fechado) envolvendo todos os vértices.

- (a) Prove que qualquer ciclo Hamiltoniano de G deve conter:
 - i. um dos caminhos $fbacde$ e $icabde$ (em qualquer direção);
 - ii. um dos caminhos $kmopnf$ e $kmpol$ (em qualquer direção).
- (b) Deduza da parte (a) que G não contém nenhum ciclo Hamiltoniano.

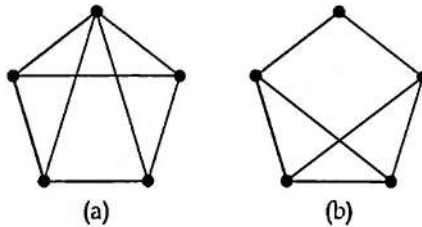
- 10. Um rato come em seu caminho através de um cubo de queijo $3 \times 3 \times 3$, fazendo túneis por todos os 27 cubinhos $1 \times 1 \times 1$. Se o rato começa em um canto, ele pode terminar no centro?
- 11. Prove que um grafo bipartido com um número ímpar de vértices não pode ser Hamiltoniano. Use este resultado para mostrar que

- (a) o seguinte grafo não é Hamiltoniano:

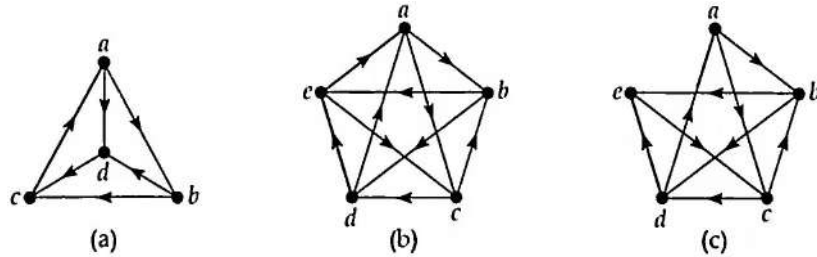


- (b) não existe nenhum *tour* do cavalo em um tabuleiro 5×5 ou 7×7 .

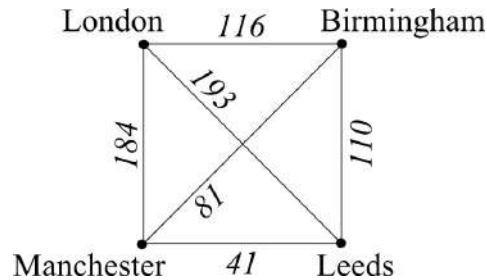
- 12. Cheque se as condições dos Teoremas de Dirac e de Ore valem para os seguintes grafos Hamiltonianos:



- 13. Determine quais dos seguintes digrafos são Hamiltonianos, e dê um ciclo adequado em cada caso:



14. Resolva o Problema do Caixeiro Viajante para as quatro cidades ilustradas abaixo para um caixeiro com base em London.



15. Considere o seguinte problema:

Um certo número de tarefas independentes devem ser processadas em uma máquina. Estas tarefas são complicadas e a máquina deve ser preparada para receber cada nova tarefa assim que a anterior estiver completa. A máquina está inicialmente preparada para processar uma das tarefas e deve estar pronta para receber esta mesma tarefa quando as demais estiverem completas. Se o custo de preparação da máquina (custo envolvendo material e pessoal) depende da tarefa que acabou de terminar e da que será processada em seguida, como as tarefas devem ser ordenadas de forma a minimizar o custo total de preparação?

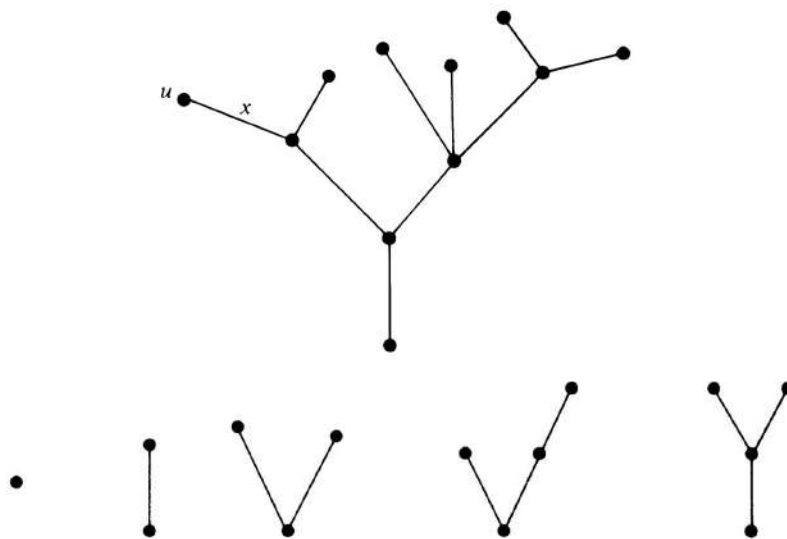
- (a) Formule o problema através de grafos (defina claramente o significado de vértices e arestas);
- (b) Quais são os resultados da Teoria de Grafos que podem ser usados para resolver o problema?

- (c) Elabore e resolva um exemplo considerando 4 tarefas. Inclua os dados necessários para que o exemplo fique completo e possa ser resolvido.

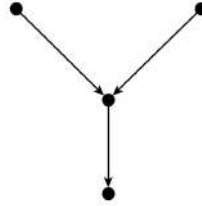
Capítulo 13

Árvores

Definição 13.1. *Uma **árvore** é um grafo conexo que não possui circuitos.*



Definição 13.2. *Uma **árvore orientada** é um digrafo conexo que não possui circuitos ou semi-circuitos.*

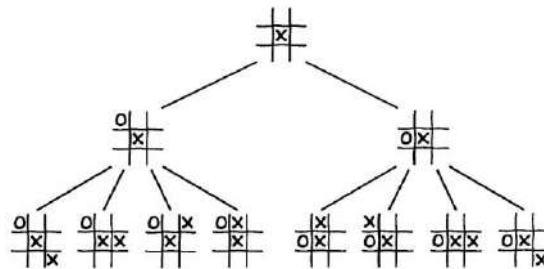


Aplicações: Construção de rodovias, instalação de redes em geral. Em alguns casos, para se mostrar um resultado para grafos é interessante começar mostrando para árvores.

Exemplos: Vamos representar as situações a seguir através de grafos.

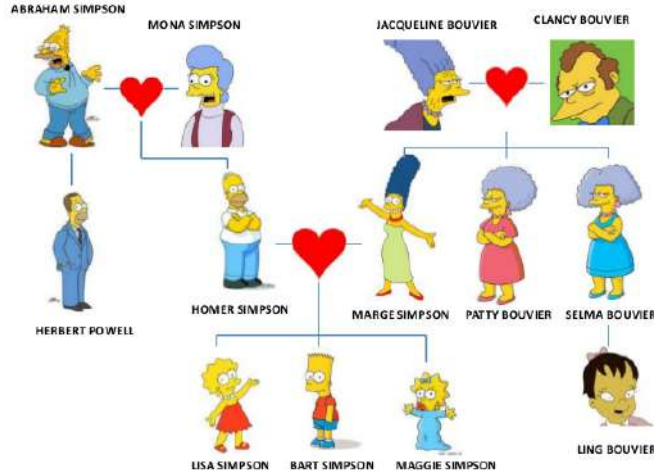
Exemplo 13.3 (Jogo da velha). **Vértices:** os estados do jogo.

Arestas: existe uma aresta entre um estado do jogo e um estado que poder ser obtido através deste.



Exemplo 13.4 (Árvore Genealógica). **Vértices:** pessoas.

Arestas: relação de parentesco em primeiro grau (mãe (pai) – filho(a)).



O que os grafos da situações acima possuem em comum?

13.1 Propriedades de Árvores

Teorema 13.5. *Um grafo G é uma árvore se, e somente se, existir um e apenas um caminho entre cada par de vértices.*

Demonstração. Se G é uma árvore, então, por definição, G é conexo e sem circuitos. Como G é conexo, então existe um caminho entre cada par de vértices.

Precisamos mostrar que este caminho é único. Vamos supor que existam dois caminhos distintos entre um par de vértices. Ora, se existem dois caminhos distintos entre um par de vértices então a união destes caminhos contém um circuito. Mas por hipótese, o grafo não possui circuitos, portanto existe apenas um caminho entre cada par de vértices.

Vamos mostrar que se existe um, e apenas um, caminho entre cada par de vértices, então G é uma árvore. Como existe um caminho entre cada par de vértices, temos que G é conexo. Vamos supor que G contenha um circuito. A existência de um circuito no grafo implica que existe pelo menos um par de vértices a, b tais que existem dois caminhos distintos entre a e b . Mas por hipótese existe um e apenas um caminho entre cada par de vértices e portanto o grafo não tem circuitos. Por definição um grafo conexo e sem circuitos é uma árvore. \square

Teorema 13.6. *Seja $G(V, A)$ um grafo com n vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) G é uma árvore.
- b) G é conexo e possui $n - 1$ arestas.
- c) G possui $n - 1$ arestas e não possui circuitos.
- d) Existe exatamente um caminho entre cada par de vértices.
- e) G não contém circuitos, e para todo $v, w \in V$, a adição da aresta (v, w) produz no grafo exatamente um circuito.

Observação 13.7. *Qualquer uma destas afirmativas pode ser usada como definição de uma árvore.*

Demonstração. Para mostrar a equivalência das afirmativas temos que mostrar que a) \Rightarrow b), b) \Rightarrow c), etc.

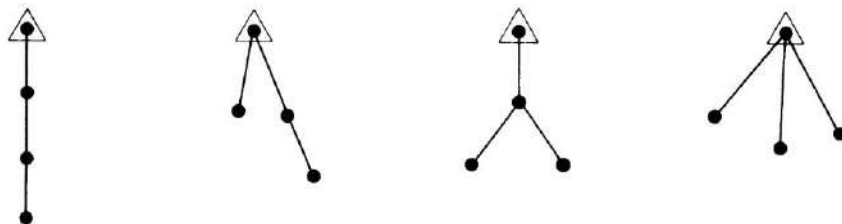
Vamos mostrar apenas que a) \Rightarrow b): Se G é uma árvore, então G é conexo e possui $n - 1$ arestas.

Como por hipótese G é uma árvore, temos que G é conexo. Precisamos mostrar apenas que G possui $n - 1$ arestas. Vamos mostrar usando indução matemática sobre n . Vamos verificar o resultado para um valor particular de n . Por exemplo para $n = 1$ e $n = 2$. Para $n = 1$, temos 0 arestas. Para $n = 2$ temos 1 aresta. Vamos supor agora que o resultado vale para um grafo G' com $k - 1$ vértices. Isto é, se G' é uma árvore então G' é conexo e possui $k - 2$ arestas. Vamos acrescentar uma nova aresta (v, w) a este grafo. Para manter o grafo conexo e sem circuitos um e apenas um dos vértices em (v, w) pode pertencer a G' . Assim ao acrescentar a aresta (v, w) a G' , precisamos acrescentar também um vértice. Assim teremos um novo grafo G'' com k vértices e $k - 1$ arestas. A forma como G'' foi construído garante que é conexo e sem circuitos. Portanto temos que G'' é uma árvore. Mostramos assim que se G é uma árvore então G é conexo com $n - 1$ arestas. \square

13.2 Raízes e Árvores Binárias

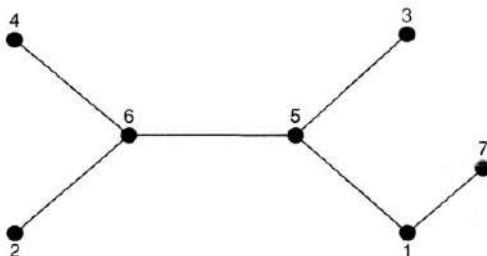
Definição 13.8. *Uma árvore na qual podemos distinguir um determinado vértice, denominado **vértice raiz**, é chamada de **árvore enraizada**.*

Por exemplo as árvores de 4 vértices abaixo são enraizadas.

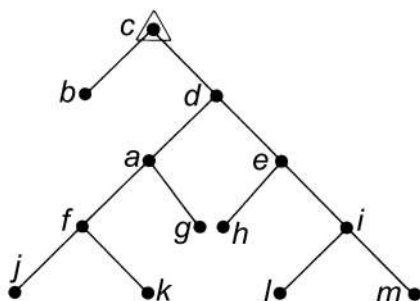


Em geral, o vértice raiz aparece naturalmente com a aplicação que o grafo representa.

Uma árvore não enraizada é chamada de árvore livre.



Se representarmos uma árvore enraizada com o vértice raiz posicionado na parte superior da figura, podemos definir níveis na árvore. Considere, por exemplo, a seguinte árvore enraizada:



Dizemos que o vértice raiz, c , está no nível zero; os vértices b e d no nível 1, os vértices a , e e no nível 2, os vértices f , g , h e i no nível 3 e j , k , l e m no nível 4.

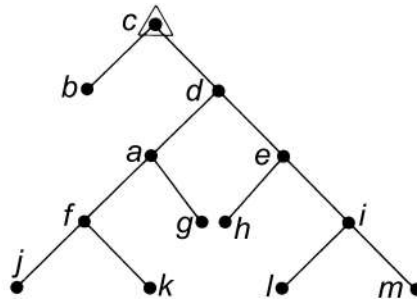
Definição 13.9. A *distância* entre dois vértices v e w em um grafo G , denotada por $d(v, w)$, é igual ao comprimento do menor caminho entre v e w .

Definição 13.10. O *nível* de um vértice x em uma árvore enraizada é igual à distância entre o vértice raiz e o vértice x . A *altura* de uma árvore enraizada é o comprimento do maior caminho existente na árvore a partir do vértice raiz.

Definição 13.11. Uma árvore **binária completa** é uma árvore enraizada tal que existe exatamente um vértice de grau dois e cada um dos vértices restantes tem grau 1 ou 3. Naturalmente o vértice de grau 2 é o vértice raiz da árvore.

Definição 13.12. Um vértice não pendente em uma árvore é chamado de *vértice interno*.

Exemplo 13.13. Abaixo temos um exemplo de árvore binária completa.



Os vértices d, a, e, f, i são vértices internos.

Proposição 13.14. O número de vértices em uma árvore binária completa (com três ou mais vértices) é sempre ímpar.

Demonstração. Existe exatamente um vértice de grau par. Os $n - 1$ vértices restantes tem grau ímpar. Mas sabemos que o número de vértice com grau ímpar é par. Portanto, se $n - 1$ é par, n é ímpar. \square

Proposição 13.15. Quantos vértices pendentes existem em uma árvore binária completa com n vértices?

Demonstração. Seja p o número de vértices pendentes. Então, existem $n - p - 1$ vértices de grau 3. Além disso,

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m = 2(n - 1),$$

onde usamos uma propriedade de árvores na última igualdade. Somando os graus dos vértices pendentes, internos e raiz tem-se $p + 3(n - p - 1) + 2 = 2(n - 1)$. Logo $p = (n + 1)/2$. \square

Exemplo 13.16. *Quantos jogos são necessários em um torneio de tênis com 56 inscritos?*

Se representarmos a competição através de uma árvore binária, teremos que os vértices pendentes são os inscritos e os vértices internos mais a raiz os jogos. Assim, queremos calcular o número de vértices internos mais a raiz em uma árvore binária com 56 vértices pendentes.

Proposição 13.17. *Seja T uma árvore binária completa de altura h e p vértices pendentes. Então:*

$$p \leq 2^h, \quad (13.1)$$

$$h \geq \lceil \log_2 p \rceil = \lceil \log_2 ((n + 1)/2) \rceil = \lceil \log_2 (n + 1) - 1 \rceil. \quad (13.2)$$

Demonstração. Este resultado pode ser provado da seguinte forma:

(13.1) princípio de indução;

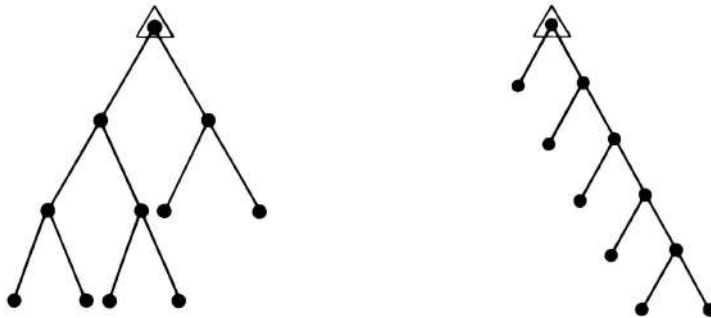
(13.2) aplica-se logaritmo a ambos os lados da expressão em (13.1). \square

Exemplo 13.18. *Qual é o nível máximo de uma árvore binária com n vértices?*

Observando que a maior altura da árvore será obtida com o menor número possível de vértices em cada nível, temos que em uma árvore com n vértices,

$$h \leq (n - 1)/2.$$

Abaixo temos um exemplo de níveis mínimo e máximo em uma árvore binária completa com 11 vértices.



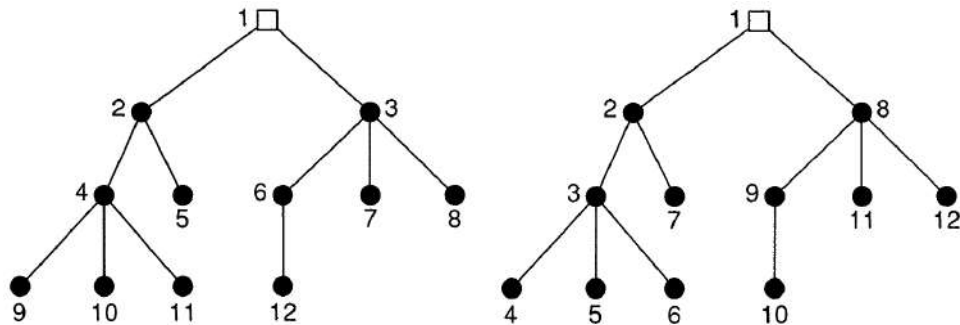
13.3 Procedimentos de Busca em Árvores

Árvore binárias são muito utilizadas em procedimentos de busca. Considere que cada vértice da árvore representa um teste com duas respostas possíveis. Iniciando o teste no vértice raiz, a resposta ao teste nos leva a um dos dois vértices do próximo nível onde novos testes são efetuados. Quando atingimos um vértice pendente (o objetivo da busca) o procedimento de busca se encerra. Em algumas aplicações é importante construir árvores tais que os vértices pendentes estejam o mais próximo possível do vértice raiz.

Há dois procedimentos de busca bem conhecidos:

- Busca em profundidade (depth first);
- Busca em largura (breadth first).

Exemplo 13.19. *Busca em largura no grafo à esquerda e busca em profundidade no grafo à direita.*



13.4 Centro de um Grafo

Definição 13.20. *Definimos a **excentricidade de um vértice** v em um grafo $G(V, A)$, denotada por $E(v)$, como sendo o valor da distância máxima entre v e os outros vértices do grafo:*

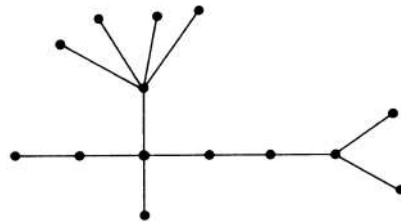
$$E(v) = \max_{w \in V} d(v, w).$$

O centro de um grafo é igual ao subconjunto de vértices com excentricidade mínima.

Exemplo 13.21. *Considere um grupo de 14 pessoas. Suponha que a comunicação entre as pessoas deste grupo esteja representada através do grafo, onde os vértices representam as pessoas e as arestas representam a possibilidade de comunicação entre duas pessoas. Supondo que todos os membros podem ser alcançados diretamente ou através de outros membros do grupo, temos que o grafo é conexo. Se usado o critério de facilidade de acesso às pessoas quem deverá ser escolhido como líder do grupo?*

A resposta a esta questão envolve o conceito de centro de um grafo, pois a melhor escolha para líder do grupo seria a pessoa que tivesse acesso mais fácil às outras pessoas do grupo, direta ou indiretamente.

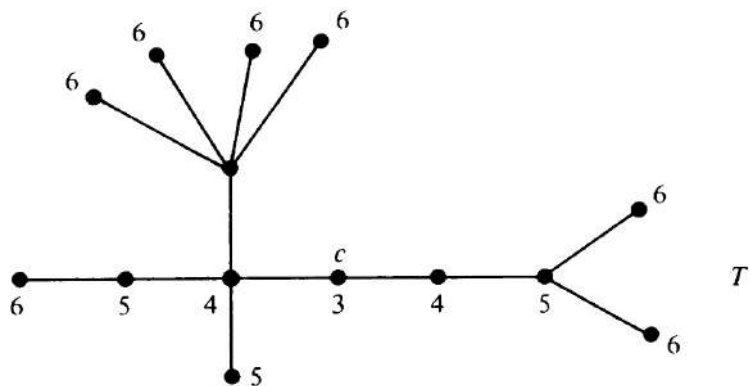
No caso de árvore este conceito é simplificado pois existe apenas um caminho entre cada par de vértices. Como definir o centro de uma árvore?



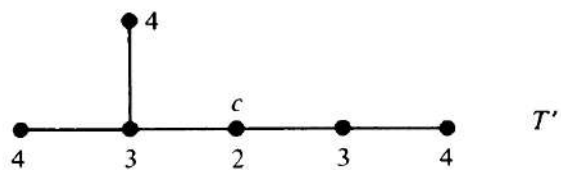
Uma maneira de determinar o centro de uma árvore é eliminando progressivamente os vértices pendentes e as arestas incidentes a eles até que reste um vértice isolado (o centro) ou dois vértices ligados por uma aresta (o bicentro).

Observe que ao retirarmos um vértice de um grafo, retiramos também uma aresta. Assim, o grau e a excentricidade do vértice que permanece no grafo diminuem de valor.

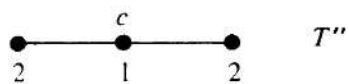
Exemplo 13.22. *Abaixo, em (a) temos as excentricidades dos vértices, de onde podemos identificar o centro c (vértice de excentricidade mínima). Em (b)-(d), temos a aplicação do procedimento citado acima.*



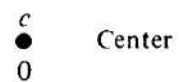
(a)



(b)

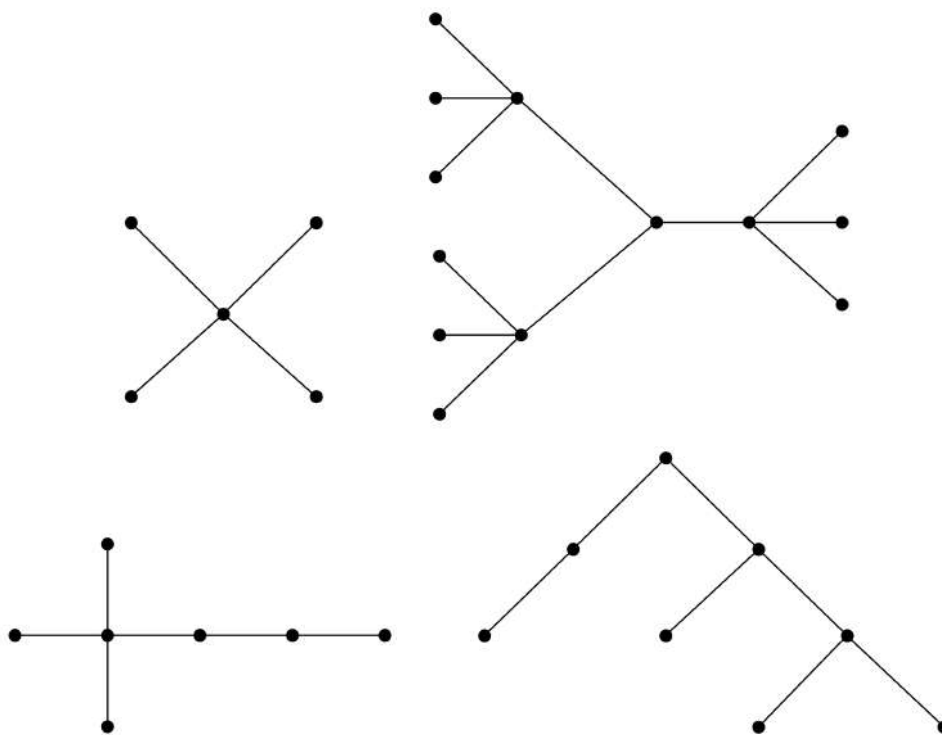


(c)



(d)

Exercícios. Encontre o centro das seguintes árvores:



Proposição 13.23. *Seja T uma árvore com pelo menos 3 vértices. Seja T' a árvore obtida de T pela exclusão dos vértices pendentos. Então T e T' possuem o mesmo centro.*

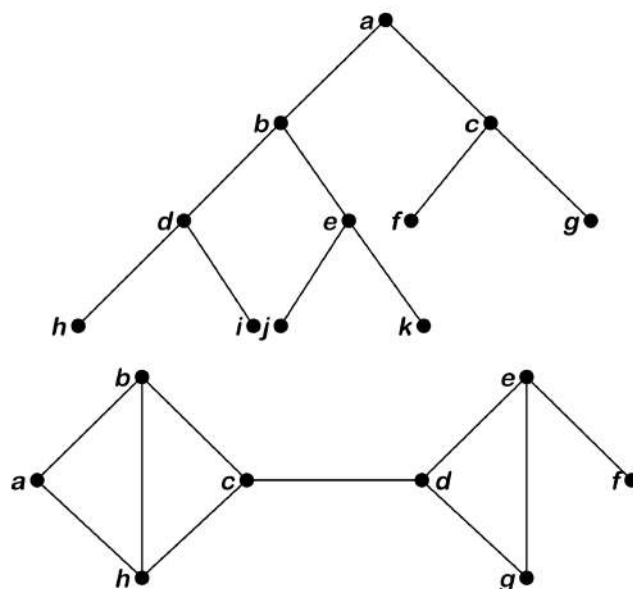
Proposição 13.24. *O centro de uma árvore possui um ou dois vértices.*

Demonstração. Ver [N. Deo, Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974].

□

Exercícios.

1. Demonstre o Teorema 13.6, que descreve as propriedades equivalentes de árvores.
2. Faça uma busca em largura e uma busca em profundidade nos grafos a seguir:

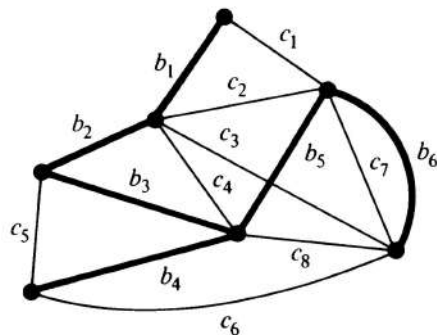


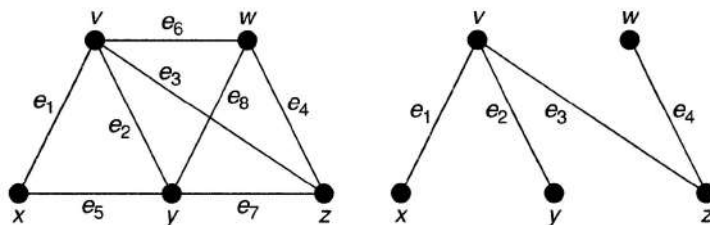
13.5 Árvores Geradoras

Em muitas aplicações, estamos interessados em subgrafos especiais de um determinado grafo.

Definição 13.25. Uma árvore T é chamada de **árvore geradora** de um grafo conexo G se T é um subgrafo de G que possui todos os vértices de G .

Exemplo 13.26. Abaixo temos um grafo e uma árvore geradora com as arestas destacadas em negrito. Depois, um outro grafo e uma árvore geradora à sua direita.





Como obter uma árvore geradora de um grafo dado G ?

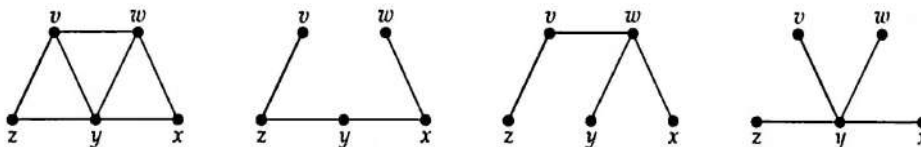
Procedimento 1:

1. Se G não possui circuitos, G é sua própria árvore geradora.
2. Se G possui circuitos, retire uma aresta do circuito. O subgrafo resultante é conexo.
3. Se existirem mais circuitos, repita a operação até retirar uma aresta do último circuito do grafo.
4. O subgrafo resultante é conexo, sem circuitos e possui todos os vértices de G . Portanto é uma árvore geradora de G .

Do procedimento acima obtemos o seguinte resultado:

Teorema 13.27. *Todo grafo conexo contém pelo menos uma árvore geradora.*

Exemplo 13.28. *Um grafo e três de suas árvores geradoras:*



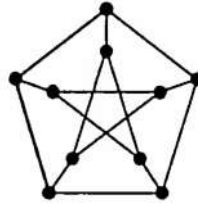
Vamos aplicar o Procedimento 1:

- Remover (v, y) , destruindo o circuito v, w, y, v ;
- Remover (y, z) , destruindo o circuito v, w, y, z, v ;
- Remover (x, y) , destruindo o circuito w, x, y, w .

Obtivemos a segunda das árvores acima.

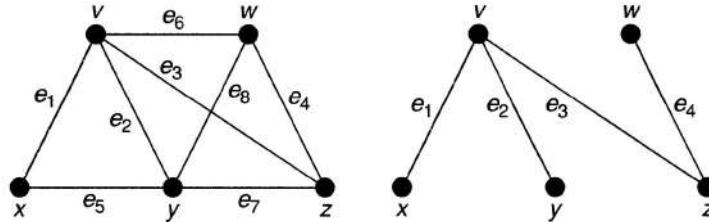
Observação 13.29. O número de árvores geradoras de um grafo pode ser muito grande. Por exemplo, o grafo de Petersen possui 2000 árvores geradoras.

Exercício. Encontre três árvores geradoras no grafo de Petersen aplicando o Procedimento 1.



Definição 13.30. Seja $G(V, A)$ um grafo conexo e $T(V, E)$ uma árvore geradora de G . Uma aresta de G que não pertence à árvore geradora T é chamada de **elo** de G em relação a T . As arestas que compõem uma árvore geradora são chamadas de **ramos**.

Exemplo 13.31. Grafo G à esquerda e uma de suas árvores geradoras T à direita:



Os elos de G relativos a T são e_5, e_6, e_7, e_8 .

Observação 13.32. Uma aresta que pertence a T pode ser um elo de G em relação a uma outra árvore geradora de G . No entanto, o número de elos de um grafo é fixo. Quantos são?

Teorema 13.33. Um grafo conexo com n vértices e m arestas possui $(m - n + 1)$ elos.

Demonstração. Exercício. □

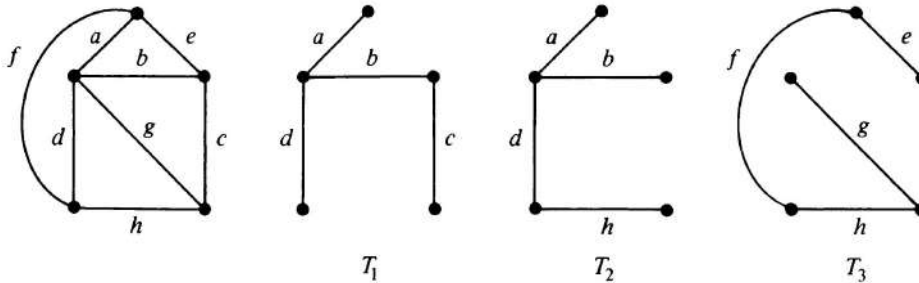
Definição 13.34. Se adicionarmos um elo de G à uma árvore geradora T , um único circuito será formado. Este circuito é chamado de **circuito fundamental** de G .

Quantos circuitos fundamentais um grafo possui? Como obter todas as árvores geradoras de um grafo dado G ?

Procedimento 2:

1. Utilize o Procedimento 1 para obter uma árvore geradora inicial T_1 .
2. Determine os elos de G relativos a esta árvore. Acrescentando um elo de G a T_1 , um circuito é formado.
3. Retire, uma a uma, as arestas do circuito fundamental formado. Desta forma são geradas as árvores geradoras associadas às arestas deste circuito, ou seja, tem-se $(k - 1)$ árvores geradoras, onde k é o número de arestas no circuito fundamental. Esta operação é chamada de transformação elementar (troca cíclica, *cyclic exchange*).
4. Repita a transformação elementar considerando os outros elos do grafo.

Exemplo 13.35. Vamos aplicar o procedimento no grafo abaixo.



- Em T_1 , adicione o elo h e considere o circuito formado b, c, h, d ;
- Remova a aresta c do circuito fundamental b, c, h, d e obtenha a árvore T_2 ;
- Repita a operação elementar removendo d e depois b ;
- Adicione outro elo (e, f ou g) e repita o processo.

A análise do Procedimento 2 esboçado acima permite a formulação de uma série de perguntas:

1. Partindo de qualquer árvore e fazendo um certo número de transformações elementares, é possível obter uma determinada árvore geradora?
2. Usando transformações elementares é possível obter todas as árvores geradoras? Quantas transformações elementares serão necessárias?
3. A eficiência do algoritmo depende da árvore geradora inicial?

Para responder algumas dessas perguntas precisamos definir alguns novos conceitos.

Definição 13.36. *Dados dois conjuntos, S_1 e S_2 , a soma direta de S_1 e S_2 , representada por $S_1 \oplus S_2$, é dada por*

$$S_1 \oplus S_2 = (S_1 \cup S_2) \setminus (S_1 \cap S_2).$$

Exemplo 13.37. *Sejam $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $S_2 = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$. Então*

$$S_1 \oplus S_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}.$$

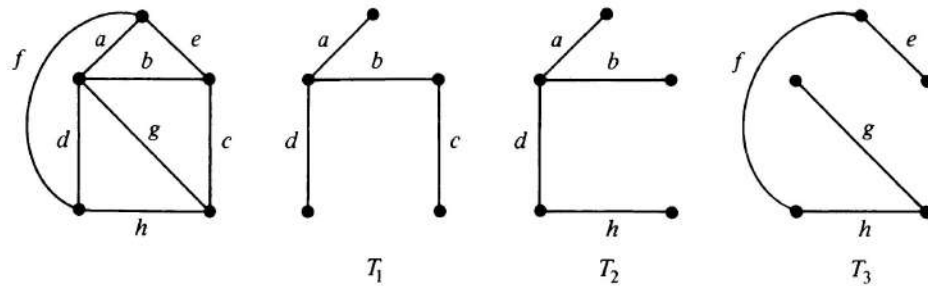
Definição 13.38. *A distância entre duas árvores geradoras de um grafo G , T_i e T_j , é igual ao número de arestas que estão presentes em T_i e que não pertencem a T_j . Denotamos por $d(T_i, T_j)$.*

Observação 13.39. *Podemos definir a distância entre duas árvores geradoras de G como sendo o número mínimo de transformações elementares necessárias para obter T_j a partir de T_i . Isto é,*

$$d(T_i, T_j) = \frac{1}{2}|A_{T_i \oplus T_j}|,$$

onde $A_{T_i \oplus T_j}$ é o conjunto de arestas obtido pela soma direta do conjunto de arestas de T_i e T_j .

Exemplo 13.40. *Considere a árvore abaixo:*



Temos:

- $d(T_1, T_2) = 1$;
- $d(T_1, T_3) = 4$;
- $d(T_2, T_3) = 3$.

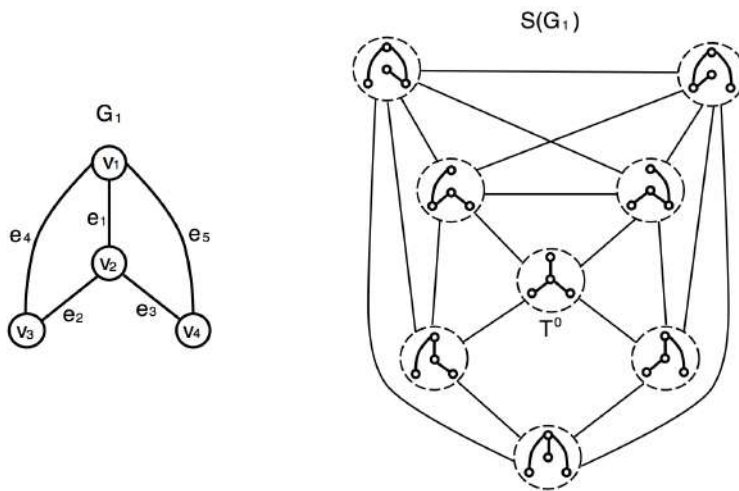
Definição 13.41. Para uma árvore geradora T_0 de um grafo G , seja $\max_i d(T_0, T_i)$ a distância máxima de T_0 a qualquer outra árvore geradora T_i de G . Então T_0 é chamada de **árvore central** de G se

$$\max_i d(T_0, T_i) \leq \max_j d(T, T_j)$$

para qualquer árvore geradora T de G .

Definição 13.42. O **grafo árvore** de G , $S(G)$, é definido como sendo o grafo em que cada vértice representa uma árvore geradora de G e existe uma aresta entre dois pares de vértices se a distância entre as árvores geradoras associadas for igual a um.

Observação 13.43. Estes conceitos são usados em [22] para encontrar todas as árvores geradoras de um grafo dado G . A Figura a seguir mostra um grafo G_1 e o grafo árvore, $S(G_1)$ associado. Um outro algoritmo para listar todas as árvores geradoras de G é proposto em [17].



Teorema 13.44. *É possível gerar todas as árvores geradoras de um grafo dado G começando de uma árvore geradora qualquer e executando sucessivas transformações elementares.*

Demonstração. Exercício. □

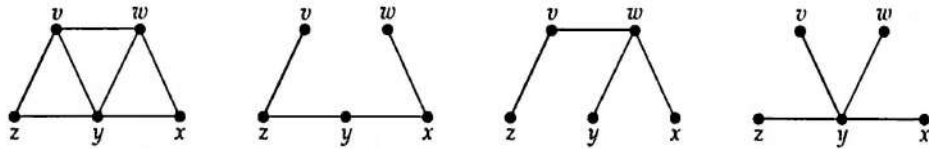
Observação 13.45. *Segue do teorema acima que o grafo $S(G)$ é sempre conexo.*

O Procedimento 1 constrói uma árvore geradora de G através da exclusão de arestas que fazem parte de um circuito em G . O Procedimento 3 a seguir constrói uma árvore geradora de G incluindo arestas e evitando a formação de circuitos.

Procedimento 3: Considere um grafo simples com n vértices e m arestas. Ideia:

- Inicie a árvore T com uma aresta qualquer de G . A cada iteração, inclua uma nova aresta em T de maneira que nenhum circuito é formado, até que $n - 1$ arestas tenham sido incluídas.

Exemplo 13.46. *Vamos aplicar o procedimento à árvore abaixo:*



- Adicione as arestas (v, z) , (z, y) , (y, x) e (x, w) ;
- Nenhum ciclo é formado.

Obtemos a primeira das árvores acima.

Em relação ao Procedimento 3,

1. O que acontece se o grafo não for conexo?

Iremos obter várias árvores geradoras, isto é, uma floresta geradora.

2. Como garantir que, ao inserir uma aresta, nenhum circuito é formado?

Verificar se as extremidades da aresta já foram incluídas. Assim ao tentarmos acrescentar a aresta (v_k, w_k) à árvore, as seguintes situações podem ocorrer:

- i. Nem o vértice v_k , nem o vértice w_k pertencem a alguma árvore T_i já construída. Neste caso crie uma nova árvore a partir destes vértices e desta aresta. Considere que exista mais de uma componente no grafo, faça $cp = cp + 1$. Associe o rótulo cp aos vértices v_k e w_k .
- ii. O vértice v_k pertence à árvore T_i e o vértice w_k pertence à árvore T_j , $i \neq j$. Neste caso, a aresta (v_k, w_k) é usada para unir as duas árvores. Faça os vértices de T_j receberem o mesmo rótulo cp dos vértices de T_i . Faça $cp = cp - 1$.
- iii. Os dois vértices pertencem a árvore T_i . Neste caso a aresta é descartada pois sua inclusão criaria um circuito.
- iv. Apenas um dos dois vértices v_k (ou w_k) pertence a alguma árvore T_i já construída. Neste caso acrescente a aresta e o vértice w_k (ou v_k) à árvore. O vértice w_k (ou v_k) recebe o mesmo rótulo cp que os vértices já pertencentes a T_i .

Como fazer para implementar as ideias acima?

- A eficiência do algoritmo depende da rapidez com que verificamos se as extremidades da aresta que estamos considerando pertence ou não a alguma árvore já criada.
- Para facilitar esta busca, criamos um vetor n -dimensional VERTEX que armazena esta informação. Quando uma aresta (i, j) é inserida em alguma árvore com rótulo cp , as posições i e j do vetor recebem o valor cp . Assim, para verificar se a aresta (v_k, w_k) já foi incluída em alguma árvore, verificamos se as posições correspondentes de VERTEX são diferentes de zero. Se para algum vértice q , $VERTEX(q) = 0$, o vértice q não está incluído em nenhuma árvore. Ao final do algoritmo, o vetor VERTEX identifica os vértices em cada componentes do grafo.

É suficiente? Precisamos ainda identificar as arestas que compõe cada árvore do grafo.

- Criamos o vetor m -dimensional ARESTA, e inicializamos com 0. Assim se a k -ésima aresta foi incluída na árvore cp , faça $ARESTA(k) = cp$.

- Ao final do algoritmo, as posições do vetor com $\text{ARESTA}(i) = 0$ identificam os elos de G .

Exercício: Considere o grafo G com 9 vértices e 12 arestas, representado através da lista de arestas abaixo (dois vetores m -dimensionais F e H , de tal forma que as extremidades da aresta k é armazenada nas posições f_k e h_k dos vetores F e H , respectivamente). Aplicar o Procedimento 3 e as ideias nele contidas, para construir uma árvore geradora para G .

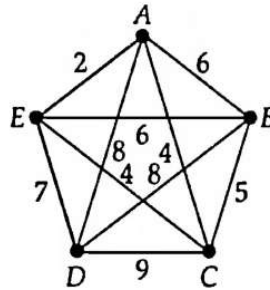
$$F = [a \ e \ i \ i \ b \ b \ c \ b \ f \ c \ f \ a]$$

$$H = [b \ h \ b \ c \ c \ e \ g \ f \ g \ e \ d \ c]$$

13.6 Árvore Geradora Mínima

Considere uma rede e o problema de encontrar a árvore geradora mínima associada, em que o **valor de árvore** é a soma dos pesos associados às arestas contidas na árvore.

Qual é a árvore geradora mínima no grafo abaixo?



Uma forma de obter a resposta é através do algoritmo (guloso) descrito a seguir.

Algoritmo de Kruskal: Determinar uma árvore geradora mínima em um grafo qualquer.

- **Passo 1:** Ordene as arestas do grafo em ordem não-decrescente de peso.
- **Passo 2:** Aplique o Procedimento 3 para encontrar a árvore geradora, considerando que as arestas serão selecionadas de acordo com a ordem estabelecida no Passo 1.

Teorema 13.47. *A árvore geradora T obtida pelo Algoritmo de Kruskal é uma árvore geradora mínima de G .*

Demonstração. Sejam e_1, e_2, \dots, e_{n-1} as arestas de T na ordem em que foram consideradas no Algoritmo de Kruskal. Isto é, $p(e_1) \leq p(e_2) \leq \dots \leq p(e_{n-1})$. Vamos supor que T não é uma árvore geradora mínima de G . Dentre as árvores geradoras de valor mínimo, seja T_{min} a árvore geradora que contém as arestas e_1, e_2, \dots, e_j de T , tal que j seja o maior índice possível. Temos que $j < n - 1$, pois em caso contrário, e_j estaria em T .

Considere que a aresta e_{j+1} é adicionada a T_{min} . Um circuito é então criado. Este circuito contém uma aresta x que não pertence a T (se todas as arestas do circuito estivessem em T , T não seria uma árvore, pois também teria um circuito). Pela ordem em que as arestas foram consideradas na construção de T , temos que e_{j+1} foi adicionada a T , mas x não foi incluída. Portanto $p(e_{j+1}) \leq p(x)$ (caso contrário x teria sido incluída em T sem a formação de um circuito).

Vamos então construir uma nova árvore: $T_{nova} = T_{min} - \{x\} + \{e_{j+1}\}$. Se $p(e_{j+1}) < p(x)$, então $p(T_{nova}) < p(T_{min})$, o que contraria a hipótese que T_{min} é mínima. Se $p(e_{j+1}) = p(x)$, então $p(T_{nova}) = p(T_{min})$, $T_{nova} \neq T_{min}$, T_{nova} é mínima e contém as arestas $e_1, e_2, \dots, e_j, e_{j+1}$, o que contradiz que T_{min} é aquela que possui a maior quantidade de arestas de T . Portanto temos uma contradição quando dizemos que $p(e_{j+1}) \leq p(x)$, e neste caso a suposição de que T não é mínima é falsa. Assim mostramos que T é mínima. \square

Algoritmo de Prim: Determinar uma árvore geradora mínima em um grafo qualquer.

- **Passo 1:** Selecione um vértice v_k de G e inclua em T ;
- **Passo 2:** Repita este passo até que todos os vértices de G pertençam a T .

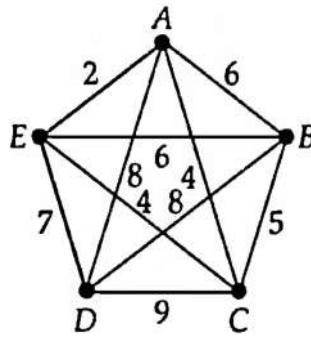
Selecione a aresta de menor peso (v_j, w_j) tal que v_j pertença a T e w_j não pertença a T .

Exercícios.

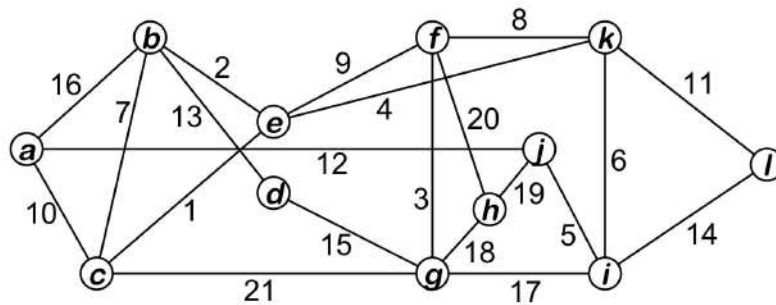
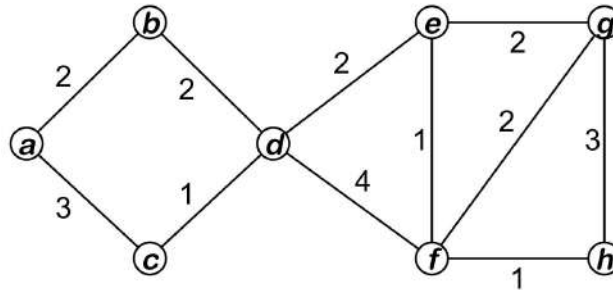
Lista baseada na referência

R.J. Wilson and J.J. Watkins, *Graphs – An Introductory approach*, J. Wiley, 1990 (vide ref. [26]).

1. Aplicar os Algoritmos de Kruskal e de Prim para encontrar a árvore geradora mínima na rede abaixo:



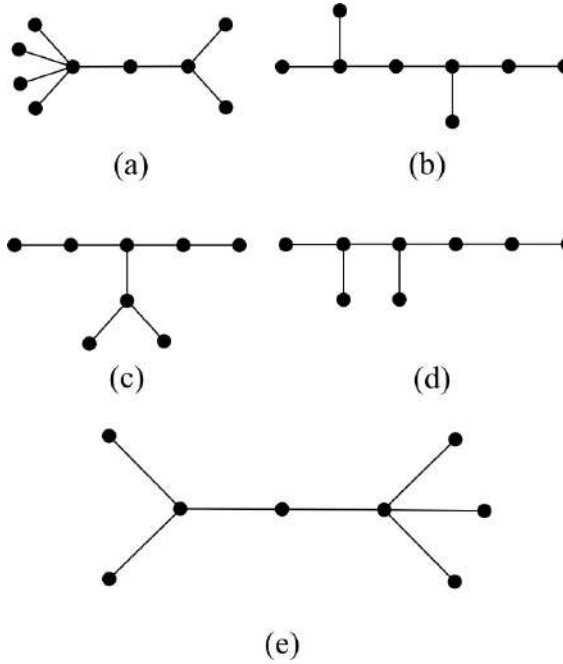
2. Utilize os algoritmos de Kruskal e de Prim para identificar uma árvore geradora mínima em cada um dos grafos abaixo. Qual é o melhor?



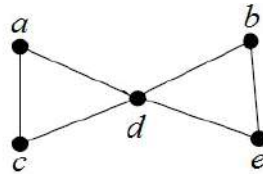
3. Verificar que uma submatriz $(n - 1) \times (n - 1)$ da matriz de incidência de um grafo G é não-singular se, e somente se, as arestas associadas às $n - 1$ colunas desta submatriz constituem uma árvore geradora de G .

Obs.: O *posto* de um grafo com n vértices é igual a $n - 1$.

4. Dê exemplos de 5 situações que podem ser representadas através de árvores.
5. Desenhe todas as árvores com n vértices para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
6. Desenhe todas as árvores enraizadas com n vértices para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
7. É possível mostrar que existem 6 árvores não isomórficas com seis vértices. Desenhe quatro delas.
8. Uma floresta é um grafo desconexo composto pela união disjunta de árvores. Se G é um grafo com n vértices e t árvores, quantas arestas possui?
9. Considere um conjunto de 8 moedas, no qual 7 moedas são idênticas e a restante é mais pesada ou mais leve que as outras. Usando uma balança de dois braços no máximo três vezes, encontre uma estratégia que possa ser representada por uma árvore para determinar qual das 8 moedas é diferente, dizendo se a moeda diferente é mais pesada ou mais leve que as demais.
10. Considere o problema de somar n números através da adição de vários pares de números e/ou somas parciais, por exemplo $\{[(3 + 1) + (2 + 5)] + 9\}$.
- (a) Represente este processo de adição com uma árvore. O que vértices internos irão representar?
- (b) Qual é a altura mínima possível de uma “árvore de adição” para a soma de 100 números?
11. Classifique cada uma das seguintes árvores como central ou bi-central e localize o seu centro/bicentro em cada caso:

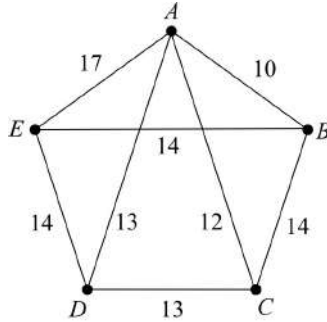


12. Classifique todas as árvores com 5 vértices como central ou bicentral e localize o centro/bicentro em cada caso.
13. Considere o grafo G :



- (a) Determine uma árvore geradora contendo a aresta (d, e) .
- (b) Determine os elos e os circuitos fundamentais de G relativos à árvore geradora obtida no item anterior.
14. Mostre que um caminho simples é também sua própria árvore geradora.
15. É possível contruir um grafo se você conhecer todas as suas árvores geradoras? Como?

16. Use o algoritmo de Kruskal para encontrar uma árvore geradora mínima no seguinte grafo valorado:



17. A seguinte tabela fornece as distâncias (em milhas) entre seis lugares na Irlanda. Use o algoritmo de Kruskal para encontrar a árvore geradora mínima que conecte estes lugares.

	Athlone	Dublin	Galway	Limerick	Sligo	Wexford
Athlone	-	78	56	73	71	114
Dublin	78	-	132	121	135	96
Galway	56	132	-	64	85	154
Limerick	73	121	64	-	144	116
Sligo	71	135	85	144	-	185
Wexford	114	96	154	116	185	-

18. Um sistema de alarme contra ladrões tem a forma de um grafo cujas arestas consistem em fios de cobre valiosos, sendo que cada aresta possui um valor diferente. O alarme dispara se o grafo é desconectado. Um ladrão deseja roubar tantas arestas quanto possível sem disparar o alarme. Quais arestas ele deve roubar de modo a maximizar o valor de seu roubo?
19. A seguinte tabela dá a distância (em milhas) entre 5 cidades:

	A	B	C	D	E
A	-	9	7	5	7
B	9	-	9	9	8
C	7	9	-	7	6
D	5	9	7	-	6
E	7	8	6	6	-

- (a) Encontre uma árvore geradora mínima unindo estas cidades usando os algoritmos de Kruskal e de Prim.

- (b) Encontre limites inferiores para a solução do problema do caixeiro viajante para estas cidades, obtidos removendo os vértices B e depois E .
- (c) Encontre a solução correta por inspeção.

20. A seguinte tabela dá a distância (em milhas) entre seis lugares na Escócia:

	Aberdeen	Edinburgh	Fort William	Glasgow	Inverness	Perth
Aberdeen	-	120	147	142	104	81
Edinburgh	120	-	132	42	157	45
Fort William	147	132	-	102	66	105
Glasgow	142	42	102	-	168	61
Inverness	104	157	66	168	-	112
Wexford	81	45	105	61	112	-

- (a) Encontre a árvore geradora mínima unindo estes lugares, usando os algoritmos de Kruskal e de Prim.
- (b) Encontre limites inferiores para a solução do problema do caixeiro viajante para estes lugares, obtidos removendo os vértices $Glasgow$ e depois $Aberdeen$.
- (c) Qual é a solução correta?

Capítulo 14

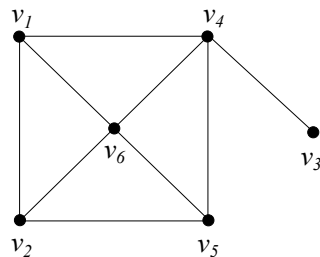
Conjuntos de Corte e Conectividade

14.1 Conjuntos de Corte

Ao estudarmos árvores geradoras, estávamos interessados em um tipo especial de subgrafo de um grafo conexo: um subgrafo que mantivesse todos os vértices do grafo interligados. Neste tópico, estamos interessados em um outro tipo de situação: subgrafos cuja remoção do grafo separa alguns vértices de outros.

Definição 14.1. *Em um grafo conexo G , um **corte de arestas** (ou simplesmente **conjunto de corte**) é um conjunto de arestas cuja remoção torna o grafo G desconexo, desde que nenhum subconjunto próprio destas arestas tenha a mesma propriedade.*

Exemplo 14.2. *Considere o grafo:*



O conjunto $\{(v_1, v_2), (v_1, v_6), (v_1, v_4)\}$ é um corte de arestas.

Aplicação:

No grafo acima, suponha que os vértices representam 6 cidades interligadas por cabos de fibra ótica. Desejamos saber quais são os pontos fracos desta rede, isto é, pontos que necessitam de cabos adicionais. Estamos procurando, entre todos os cortes de arestas deste grafo, aquele com o menor número de arestas. Neste caso, a cidade v_3 necessita de mais cabos.

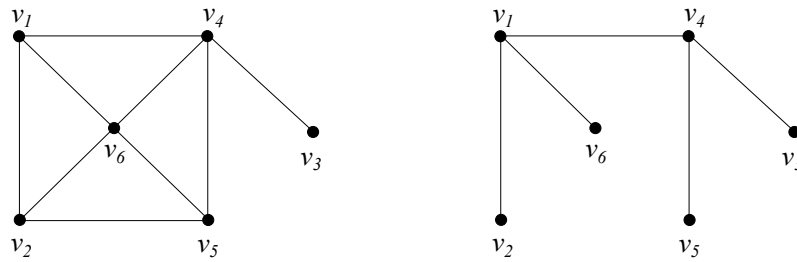
Questões:

1. Como são os cortes de arestas de uma árvore?
2. Considere uma árvore geradora T em um grafo conexo G e um corte de arestas S qualquer deste grafo. Existe alguma aresta em comum entre T e S ?

Sim, pois caso contrário a remoção das arestas em S do grafo G não resultaria em um grafo desconexo.

Teorema 14.3. *Todo corte de arestas de um grafo conexo G contém pelo menos uma aresta em comum com qualquer árvore geradora de G .*

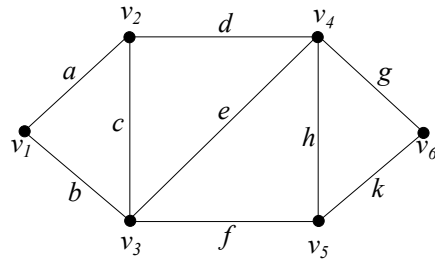
Exercício. Verificar o teorema para a seguinte árvore geradora T :



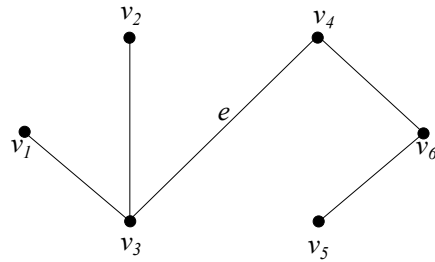
Para identificar os pontos fracos de uma rede G é necessário encontrar todos os cortes de aresta de G . Como fazer isso?

Definição 14.4. *Seja um grafo G e T uma árvore geradora de G . Um conjunto de corte fundamental relativo à árvore T , é um conjunto de corte de G que contém apenas uma aresta em comum com a árvore geradora T .*

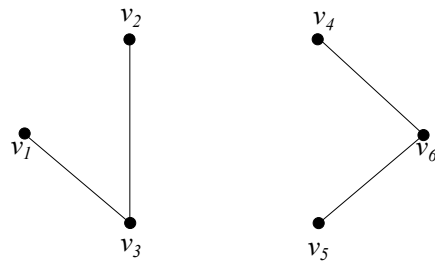
Exemplo 14.5. *Seja G :*



Seja T :



Vamos considerar a aresta e . A remoção da aresta e de T particiona o conjunto de vértices de T em

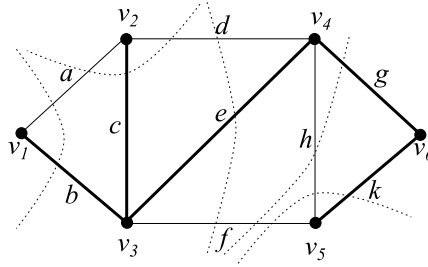


Ou seja, $\{e\}$ é um corte de arestas de T .

Como determinar um corte de arestas fundamental de G relativo a T que contenha a aresta e ? Basta encontrarmos o conjunto de arestas contendo o ramo $\{e\}$ e que provoquem a mesma partição no conjunto de vértices de G : $\{d, e, f\}$.

Perguntas:

1. Quantos cortes de arestas fundamentais existem? $n - 1$, ou seja 5. Quais são eles? $\{a, b\}$, $\{d, e, f\}$, $\{a, c, d\}$, $\{f, g, h\}$, $\{f, h, k\}$.



2. Qual é a relação entre cortes de aresta fundamentais e circuitos fundamentais?

Podem ser obtidos a partir de uma árvore geradora de G .

Todo elo de uma árvore geradora define um circuito fundamental.

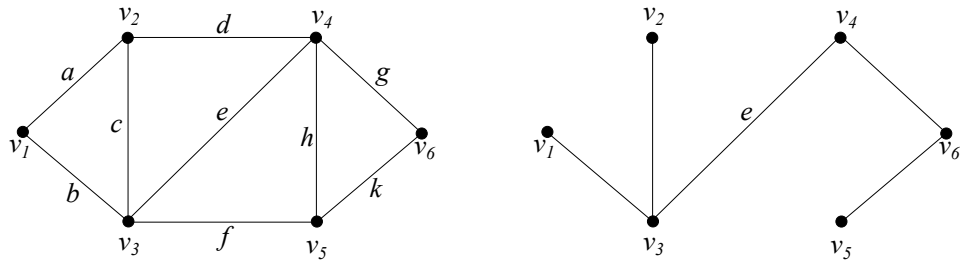
Todo ramo de uma árvore geradora define um corte de aresta fundamental.

3. Como obter todos os cortes de arestas de um grafo G ?

Teorema 14.6. *A soma direta de dois cortes de arestas em um grafo é igual a um terceiro corte de arestas ou a união aresta-disjunta de cortes de arestas.*

Demonstração. Ver N. Deo, *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice-Hall, Inc., 1974. \square

Exemplo 14.7. *Sejam o grafo G e árvore T do exemplo anterior:*

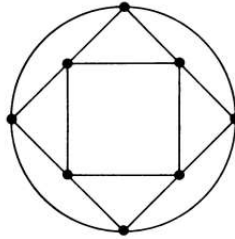


- $\{d, e, f\} \oplus \{f, g, h\} = \{d, e, g, h\}$ é um corte de arestas, mas não é fundamental.
- $\{a, b\} \oplus \{b, c, e, f\} = \{a, c, e, f\}$ é um corte de arestas, mas não é fundamental.

- $\{d, e, h, k\} \oplus \{f, g, h\} = \{d, e, f, g, k\}$ não é um corte de arestas, mas é união aresta-disjunta de dois cortes de aresta $\{d, e, f\} \cup \{g, k\}$.

Assim, temos um método para gerar conjuntos de corte adicionais a partir de um certo número de conjuntos de corte dados. É claro que não esperamos gerar todos os conjuntos de corte aplicando este método iniciando com qualquer par de conjuntos de corte. Qual seria o conjunto mínimo de conjuntos de corte a partir do qual podemos obter todos os conjuntos de corte fazendo somas diretas? A resposta é o conjunto de todos os cortes de arestas fundamentais relativos a uma dada árvore geradora. A demonstração deste fato pode ser encontrada no Capítulo 6 de *N. Deo, Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall, Inc., 1974*.

Exercício. Considere o grafo:



- Determine uma árvore geradora deste grafo e liste todos os sete cortes de arestas fundamentais relativos a esta árvore.
- Usando a operação de soma direta, determine todos os outros cortes de arestas deste grafo.

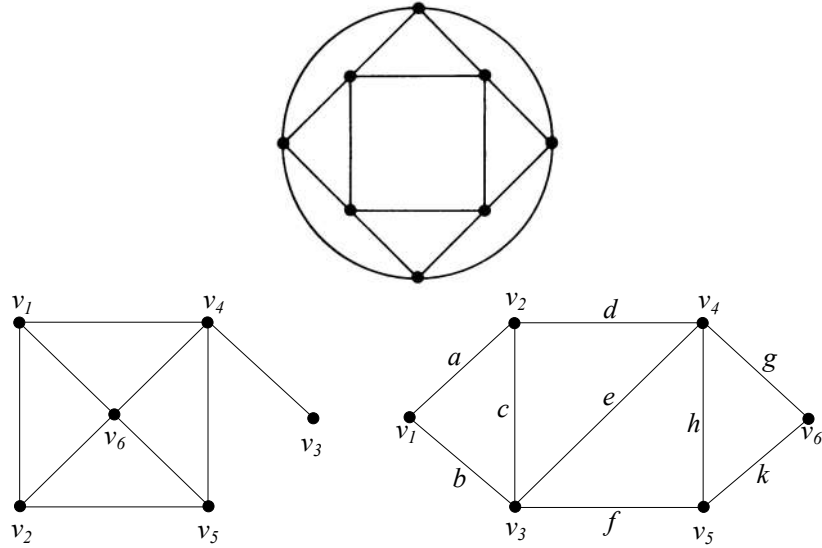
14.2 Conectividade

No estudo de conectividade, entre outros aspectos, estamos interessados em estudar a vulnerabilidade de um grafo. Podemos observar que cada corte de arestas tem um determinado número de arestas. Estamos interessados no corte de arestas que possui o menor número de elementos.

Definição 14.8. O número de arestas no menor corte de arestas de um grafo conexo G é chamado de **conectividade de arestas** de G .

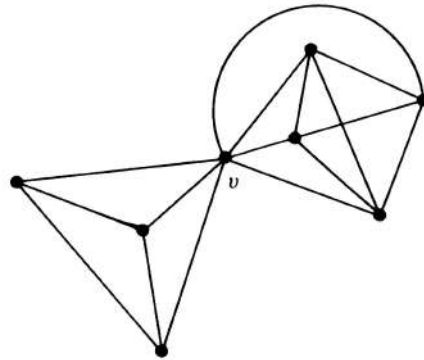
Notação: $C_A(G)$ ou simplesmente C_A .

Exemplo 14.9. (a) Qual é a conectividade de arestas do grafos abaixo?



(b) Qual é a conectividade de arestas de uma árvore?

(c) Qual é a conectividade de arestas do grafo abaixo?



No grafo do exemplo acima, observemos que não é possível obter um subgrafo desconexo removendo apenas 1 aresta de G . No entanto, é possível obter um subgrafo desconexo, através da remoção de um vértice. Assim, podemos definir a conectividade de vértices do grafo.

Definição 14.10. Em um grafo conexo G , um corte de vértices é um conjunto de vértices cuja remoção torna o grafo G desconexo, desde que nenhum subconjunto próprio tenha a mesma propriedade.

O número de vértices no menor corte de vértices é chamado de **conectividade de vértices** de G .

Notação: $C_V(G)$ ou simplesmente C_V .

Exemplo 14.11. A conectividade de vértices de cada um dos grafos do exemplo anterior é:

1) $C_V(G_1) = 4$, $C_V(G_2) = 1$, $C_V(G_3) = 2$;

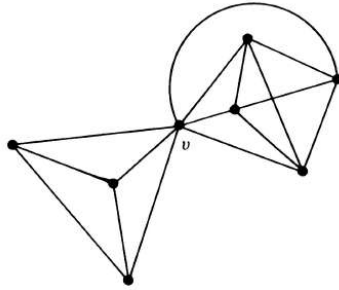
2) $C_V(\text{árvore}) = 1$;

3) $C_V(G) = 1$.

Observação 14.12. Note que a conectividade de vértices não faz sentido para grafos com menos do que três vértices e para grafos completos.

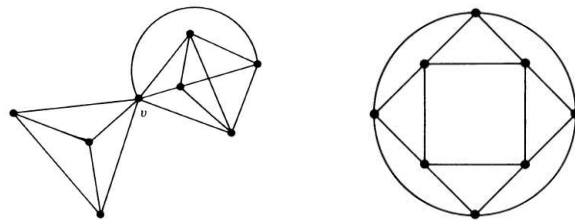
Definição 14.13. Um grafo conexo é **separável** se a conectividade de vértices é igual a 1.

Exemplo 14.14. O grafo do item 3) do exemplo anterior é separável.



Aplicação:

Suponha que existam n estações para serem ligadas através de m linhas (linhas de telefone, túneis, estradas, etc.) tais que $m \geq n - 1$. Qual é a melhor maneira de se fazer a conexão? Precisamos de um grafo com n vértices, m arestas e com o maior valor possível para C_A e C_V . Os grafos abaixo possuem 8 vértices e 16 arestas.



No primeiro, temos $C_V = 1$ e $C_A = 3$. No segundo, $C_A = C_V = 4$. Ou seja, este último grafo, representa uma forma melhor de se obter a conexão. É necessário destruir 4 estações ou 4 linhas para quebrar a comunicação entre as estações.

Qual é o maior valor possível para C_V e C_A ?

Teorema 14.15. *A conectividade de arestas de um grafo é menor ou igual ao grau do vértice de grau mínimo do grafo.*

Demonstração. Seja v_{min} o vértice de grau mínimo do grafo. Seja δ o grau deste vértice. Para separar este vértice dos demais vértices do grafo é necessário remover as δ arestas incidentes em v_i . Segue que o número mínimo de arestas cuja remoção desconecta o grafo não pode exceder δ . Portanto, $C_A \leq \delta$. \square

Teorema 14.16. *A conectividade de vértices em um grafo G é menor ou igual à conectividade de arestas.*

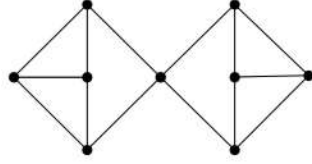
Demonstração. Segue da definição de conectividade de arestas que existe um conjunto de corte em G , digamos S , com C_A arestas. S induz uma partição do conjunto de vértices de G , digamos $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Removendo no máximo C_A vértices de V_1 (ou V_2) nos quais as arestas de S são incidentes, removemos S (junto com todas as outras arestas que eventualmente sejam incidentes aos vértices removidos) de G . O grafo obtido é claramente desconexo. Daí, o número mínimo de vértices cuja remoção desconecta o grafo não pode exceder C_A . Portanto, $C_V \leq C_A$. \square

Corolário 14.17. $C_V \leq C_A \leq \delta$.

Observação 14.18. *É possível mostrar que $C_V \leq C_A \leq \lfloor 2m/n \rfloor$.*

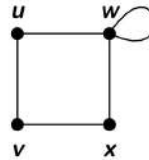
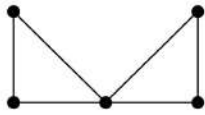
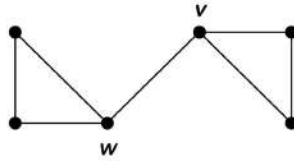
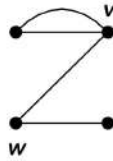
Para obter um grafo com o maior valor possível para C_V , inicialmente construa um grafo regular de grau $\lfloor 2m/n \rfloor$, em seguida acrescente as arestas restantes.

Exercício. Determine a conectividade de vértices e de arestas do grafo abaixo. Observe que a desigualdade acima é satisfeita estritamente.



Definição 14.19. Um grafo G é **k -conexo** em arestas (vértices) quando sua conectividade de arestas (vértices) é maior ou igual a k .

Exercício. Verificar a conectividade de arestas e vértices dos grafos a seguir:



Teorema 14.20. Um grafo G é k -conexo (em vértices) se, e somente, se existem pelo menos k caminhos vértice-disjuntos (exceto nos extremos) entre cada par de vértices de G .

Exemplo 14.21. No quarto grafo do exemplo anterior temos:

- $\{u, (u, v), v, (v, x), x\}$ e
- $\{u, (u, w), w, (w, x), x\}$ entre os vértices u e x .

Teorema 14.22. Seja G um grafo conexo. Então, $C_A = k$ se, e somente se, todo par de vértices em G é unido por pelo menos k caminhos aresta-disjuntos.

As demonstrações dos dois últimos teoremas seguem como consequência de outros resultados que veremos mais adiante.

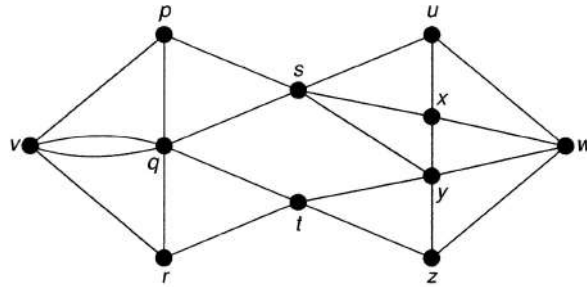
Aplicação:

Considere que mensageiros devem ser enviados entre duas cidades a e b . Como algumas estradas podem estar bloqueadas, queremos que cada mensageiro use estradas diferentes. Quantos mensageiros podem ser enviados?

Considere um grafo onde os vértices são as cidades e as arestas representam estradas. O número de mensageiros que podem ser enviados é igual ao número de caminhos aresta-disjuntos entre os vértices a e b . Este número pode ser determinado usando os resultados acima.

14.3 Teorema de Menger

O Teorema de Menger¹ versa sobre o número de caminhos disjuntos entre um par de vértices em um grafo. Por exemplo, no grafo abaixo, há quatro caminhos aresta-disjuntos e dois caminhos vértice-disjuntos entre os vértices v e w .



Antes de enunciar e discutir este notório teorema, precisamos de algumas definições.

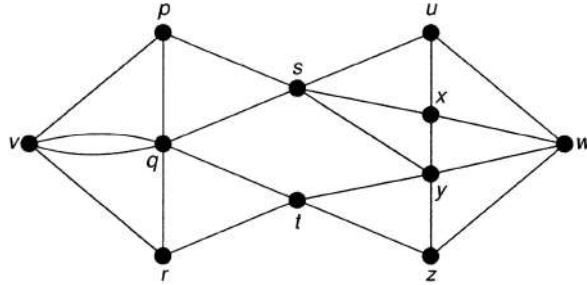
Definição 14.23. *Sejam $G(V, A)$ um grafo conexo e $v, w \in V$ vértices distintos. Um subconjunto $E \subset A$ é dito ser vw -desconectador em G se todo caminho de v a w possui uma aresta de E .*

Definição 14.24. *Sejam $G(V, A)$ um grafo conexo e $v, w \in V$ vértices distintos. Um subconjunto $S \subset V \setminus \{v, w\}$ é dito ser vw -separador em G se todo caminho de v a w passa por um vértice de S .*

Observação 14.25. *Note que um conjunto vw -desconectador é um corte de arestas e um conjunto vw -separador é um corte de vértices.*

¹Esta seção foi preparada a partir da referência: R.J. Wilson, Introduction to Graph Theory, Longman, 1996.

Exemplo 14.26. No grafo abaixo, os conjuntos $E_1 = \{(p, s), (q, s), (t, y), (t, z)\}$ e $E_2 = \{(u, w), (x, w), (y, w), (z, w)\}$ são vw -desconectores. Os conjuntos $S_1 = \{s, t\}$ e $S_2 = \{p, q, y, z\}$ são vw -separadores.



Lema 14.27. Sejam $G(V, A)$ um grafo conexo e $v, w \in V$ vértices distintos. Se $E \subset A$ é um conjunto vw -desconector em G , então o número de caminhos aresta-disjuntos de v a w é no máximo $|E|$.

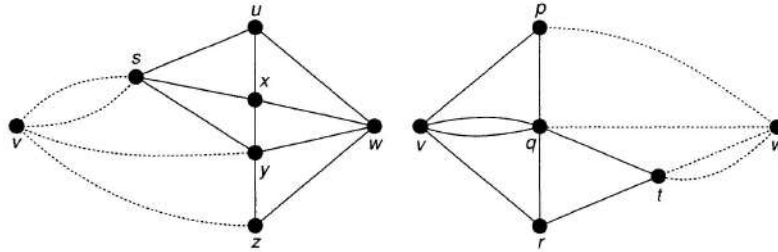
Demonstração. Suponha que há mais do que $|E|$ caminhos aresta-disjuntos de v a w . Como todo caminho de v a w possui um aresta de E , há alguma aresta em E pela qual passa mais de um caminho, em contradição ao fato de que os caminhos são aresta-disjuntos. \square

Teorema 14.28 (Teorema de Menger para arestas). Sejam $G(V, A)$ um grafo conexo e $v, w \in V$ vértices distintos. O número máximo de caminhos aresta-disjuntos de v a w é igual ao número mínimo de arestas em um conjunto vw -desconector em G .

Demonstração. Pelo lema, é suficiente mostrar que o número máximo de caminhos aresta-disjuntos de v a w é igual a $|E|$, onde E é um conjunto vw -desconector mínimo. Vamos proceder por indução no número de arestas. Suponha que o resultado vale para grafos conexos com menos do que m arestas, onde $m = |A|$.

Há dois casos a considerar.

(i) Suponha que exista um conjunto vw -desconector mínimo em que nem todas as suas arestas são incidentes em v e nem todas são incidentes em w . (Por exemplo, o conjunto E_1 no exemplo anterior é um conjunto deste tipo.) A remoção das arestas de E desconecta o grafo em dois subgrafos, digamos, V e W contendo v e w , respectivamente. Defina dois grafos, G_1 e G_2 , da seguinte forma: G_1 é obtido contraindo-se todas as arestas de V em v e G_2 é obtido contraindo-se as arestas de W em w .



É claro que E é um conjunto vw -desconectador mínimo em G_1 e em G_2 . Além disso, G_1 e G_2 possuem menos do que m arestas. Segue da hipótese de indução que há $|E|$ caminhos aresta-disjuntos de v a w em ambos G_1 e G_2 . Combinando estes caminhos, obtemos $|E|$ caminhos aresta-disjuntos de v a w em G . (Por exemplo, no caso do grafo do exemplo anterior, em que $E_1 = \{(p, s), (q, s), (t, y), (t, z)\}$, temos os seguintes caminhos: $(v, p), (p, s), (s, u), (u, w)$; $(v, q), (q, s), (s, x), (x, w)$; $(v, q), (q, t), (t, y), (y, w)$; $(v, r), (r, t), (t, z), (z, w)$.)

(ii) Agora suponha que cada conjunto vw -desconectador mínimo em G possui todas as suas arestas incidentes em v ou em w . Suponha ainda que tais conjuntos tem cardinalidade k . (Por exemplo, o conjunto E_2 no exemplo anterior é um conjunto deste tipo.) Podemos supor, sem perda de generalidade, que toda aresta de G está contida em algum conjunto vw -desconectador mínimo. De fato, se existe alguma aresta que não possui tal propriedade, sua remoção não alteraria o valor de k . Aplicando-se a hipótese de indução, obteríamos k caminhos aresta-disjuntos. Deste modo, toda aresta de G é incidente em v e/ou em w . Assim, todo caminho de v a w possui uma ou duas arestas. Consequentemente, possui no máximo uma aresta de um conjunto vw -desconectador de cardinalidade k . Seja P um tal caminho. Considere o grafo H obtido de G após a remoção das arestas em P . Segue da hipótese de indução que H possui ao menos $k - 1$ caminhos aresta-disjuntos. Estes caminhos, juntamente com P , somam os k caminhos aresta-disjuntos em G . □

Teorema 14.29 (Teorema de Menger para vértices, 1927). *Sejam $G(V, A)$ um grafo conexo e $v, w \in V$ vértices distintos. O número máximo de caminhos vértices-disjuntos de v a w é igual ao número mínimo de vértices em um conjunto vw -separador em G .*

Demonstração. Similar à demonstração do teorema anterior. □

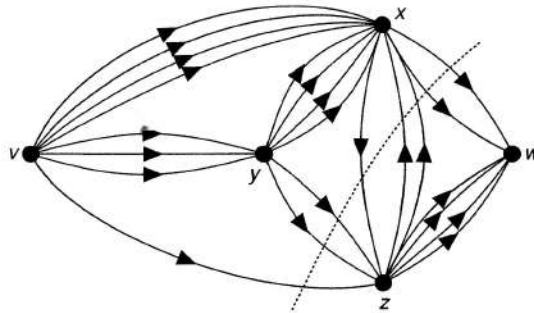
Corolário 14.30. *Um grafo G é k -conexo em arestas se, e somente se, existe no mínimo k caminhos aresta-disjuntos entre todo par de vértices distintos de G .*

Corolário 14.31. *Um grafo G com ao menos $k+1$ vértices é k -conexo (em vértices) se, e somente se, existe no mínimo k caminhos vértice-disjuntos entre todo par de vértices distintos de G .*

Teorema 14.32 (Teorema de Menger para digrafos). *Sejam $D(V, A)$ um digrafo conexo, $v \in V$ um vértice fonte e w um vértice sumidouro. O número máximo de caminhos aresta-disjuntos de v a w é igual ao número mínimo de arestas em um conjunto vw -desconectador em G .*

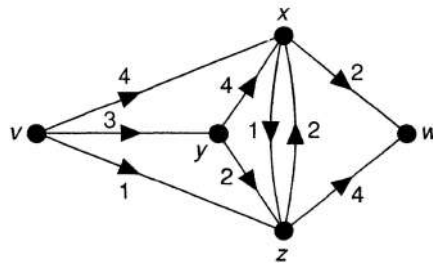
Demonstração. Similar à demonstração do Teorema de Menger para grafos. \square

Exemplo 14.33. *No digrafo abaixo, há seis caminhos aresta-disjuntos de v a w .*



O conjunto $E = \{(v, z), (x, z), (y, z), (y, z), (x, w), (x, w)\}$ é um conjunto vw -desconectador.

Observação 14.34. *A questão se complica de acordo com o número de arestas paralelas entre os pares de vértices. Uma maneira de contornar isso é utilizar apenas uma aresta entre cada par (ordenado) de vértices e adicionar um peso a esta aresta como sendo o número de arestas paralelas existente entre o par de vértices. Isso nos leva a um problema de fluxo máximo (assunto que veremos brevemente).*

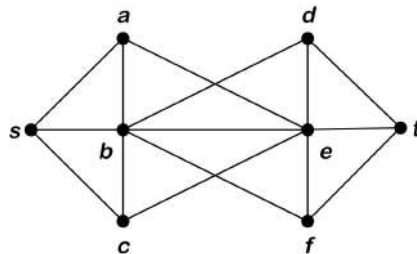


Exercícios.

Lista baseada na referência

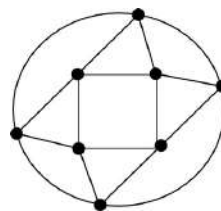
R.J. Wilson and J.J. Watkins, *Graphs – An Introductory approach*, J. Wiley, 1990 (vide ref. [26]).

1. Seja o grafo:



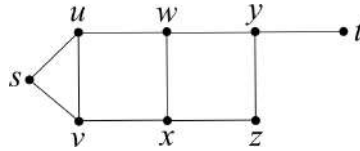
- (a) Encontre 3 caminhos aresta-disjuntos entre s e t .
- (b) Encontre um corte de arestas contendo 3 arestas que separe s e t .
- (c) Qual é o maior número possível de caminhos aresta-disjuntos entre s e t ?

2. Considere o grafo:



- (a) Determine uma árvore geradora deste grafo e liste todos os sete cortes de arestas fundamentais relativos a esta árvore.
- (b) Usando a operação de soma direta, determine todos os outros cortes de arestas deste grafo.

3. Considere o grafo



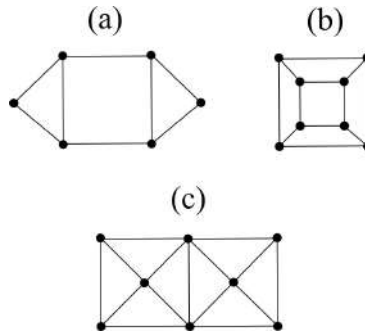
Quais dos conjuntos abaixo são corte de arestas do grafo?

- (a) $\{(s, u), (s, v)\}$;
- (b) $\{(u, x), (w, x), (y, z)\}$;
- (c) $\{(u, x), (v, x), (w, x), (y, z)\}$;
- (d) $\{(y, t)\}$;
- (e) $\{(w, x), (x, z), (y, z)\}$;
- (f) $\{(u, w), (w, x), (w, y)\}$.

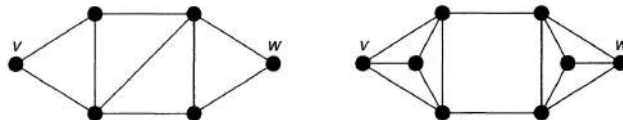
Quais dos conjuntos abaixo são corte de vértices do grafo?

- (a) $\{u, v\}$;
- (b) $\{v, w\}$;
- (c) $\{u, x, y\}$;
- (d) $\{w, z\}$.

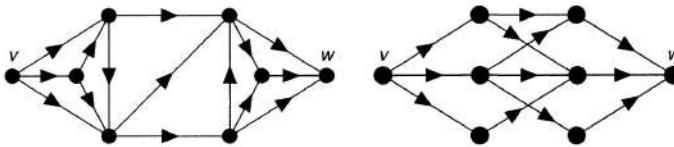
4. Determine a conectividade de arestas e a conectividade de vértices dos grafos abaixo.



5. Verifique as duas versões do Teorema de Menger para cada um dos grafos abaixo.



6. Verifique a versão do Teorema de Menger para digrafos para cada um dos digrafos abaixo.



Capítulo 15

O Problema do Fluxo Máximo

Considere uma rede $D(V, E)$ em que a cada aresta $e \in E$ está associado um número real positivo $c(e)$, denominado capacidade da aresta e . Suponha que a rede D possua:

- Um vértice fonte $s \in V$, chamado origem;
- Um vértice sumidouro $t \in V$, chamado destino.

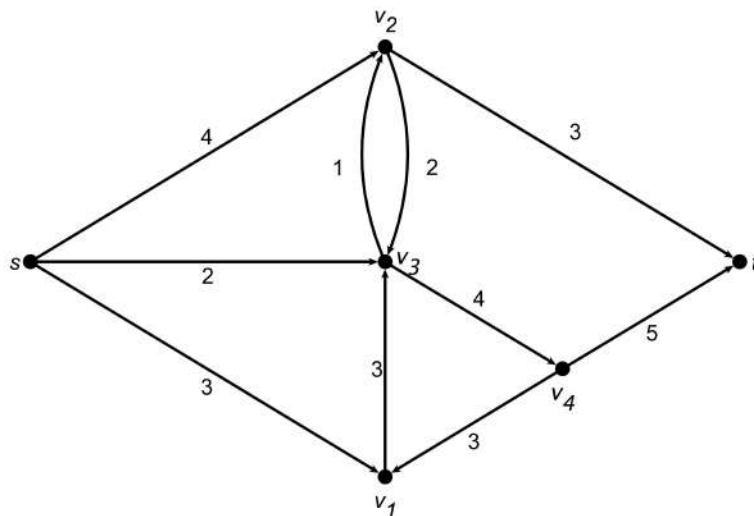


Figura 15.1: Uma rede.

Definição 15.1. Um **fluxo** f de s a t em D é uma função que a cada aresta $e \in E$ associa um número real não-negativo $f(e)$ satisfazendo as seguintes condições:

$$i) 0 \leq f(e) \leq c(e) \quad \forall e \in E;$$

(capacidade)

$$ii) \sum_{v_j \in V} f(v_j, v) = \sum_{v_j \in V} f(v, v_j) \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\};$$

(conservação do fluxo)

$$iii) \sum_{v_j \in V} f(s, v_j) = \sum_{v_j \in V} f(v_j, t) = F = f(D),$$

onde $F = f(D)$ é denominado o valor do fluxo na rede.

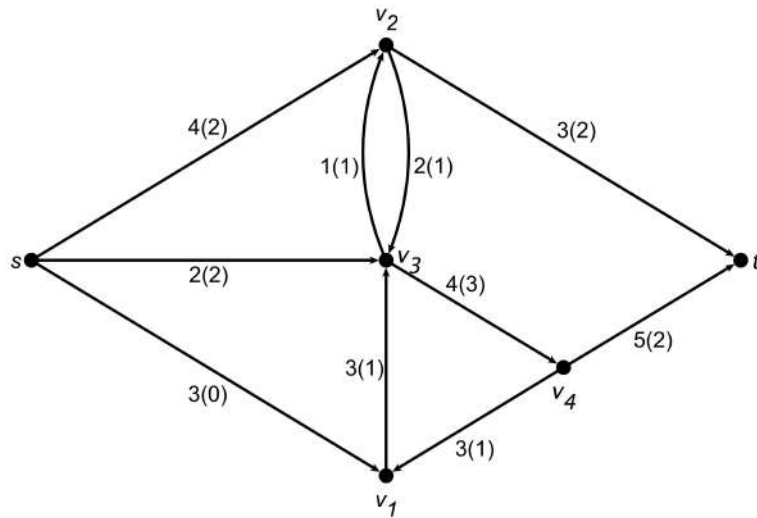


Figura 15.2: Fluxo em uma rede.

Em relação à Figura 15.2, note que:

- Em cada aresta, o termo antes dos parênteses indica sua capacidade e o termo entre parênteses o fluxo na aresta.
- A aresta (v_2, v_3) possui capacidade 2 e fluxo 1.

- O valor do fluxo no vértice v_2 é 3 e no vértice s é 4 (valor do fluxo na rede).

Exercícios.

1. Verificar que o fluxo exibido na Figura 15.2 é um **Fluxo Legal**, ou seja, satisfaz as condições i) a iii) da definição.
2. Considerando esta mesma rede, definir uma atribuição de fluxos para as arestas que não satisfaça ii).
3. Qual o valor máximo de fluxo para esta rede?

Definição 15.2. *Seja f um fluxo em uma rede $D(V, E)$. Uma aresta é dita **saturada** se $f(e) = c(e)$.*

*Um vértice $v \in V$ é dito **saturado** quando todas as arestas convergentes a v ou divergentes de v estão saturadas.*

Exercício. Verifique se há vértices ou arestas saturados na rede exibida na Figura 15.2.

Definição 15.3. *O problema de fluxo máximo em redes consiste em: dada uma rede, um vértice origem s e um vértice destino t , determinar uma atribuição de fluxo para as arestas da rede satisfazendo as condições i) a iii) tal que fluxo na rede seja o maior possível.*

Definição 15.4. *Um fluxo é dito **maximal** quando todo caminho de s a t em D contém pelo menos uma aresta saturada.*

Observação 15.5. *Todo fluxo máximo é maximal, mas a recíproca não é verdadeira. Na Figura 15.3 temos um fluxo maximal que não é máximo e na Figura 15.4 um fluxo máximo (e maximal).*

Exercício. Defina um fluxo maximal que não seja máximo na rede da Figura 15.1.

Definição 15.6. *Seja $S \subset V$ um subconjunto de vértices tal que $s \in S$ e $t \notin S$, e seja $\bar{S} = V \setminus S$. Um **corte** (S, \bar{S}) relativo a s e t em D é o subconjunto de arestas de D que possuem uma extremidade em S e outra em \bar{S} .*

Assim todo caminho da origem s ao destino t em D contém alguma aresta de (S, \bar{S}) .

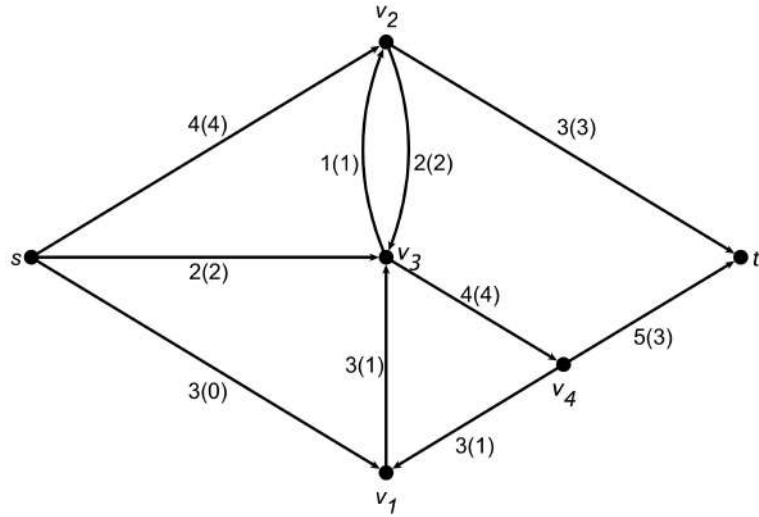


Figura 15.3: Fluxo maximal em uma rede (Szwarcfiter [21]).

Exemplo 15.7. Em relação à rede da Figura 15.1, se $S = \{s\}$ e $\bar{S} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, t\}$, então $(S, \bar{S}) = \{(s, v_1), (s, v_2), (s, v_3)\}$; Se $S = \{s, v_1\}$ e $\bar{S} = \{v_2, v_3, v_4, t\}$, temos $(S, \bar{S}) = \{(s, v_2), (s, v_3), (v_1, v_3), (v_4, v_1)\}$.

Notação:

- $(S, \bar{S})^+ = \{(v, w) \in E \text{ tal que } v \in S \text{ e } w \in \bar{S}\}$;
- $(S, \bar{S})^- = \{(v, w) \in E \text{ tal que } w \in S \text{ e } v \in \bar{S}\}$.

Definição 15.8. A **capacidade** $c(S, \bar{S})$ do corte (S, \bar{S}) é igual a soma das capacidades das arestas de $(S, \bar{S})^+$, ou seja,

$$c(S, \bar{S}) = \sum_{e_j \in (S, \bar{S})^+} c(e_j).$$

Um **corte mínimo** é aquele que possui capacidade mínima (c_{\min}).

Exercício. Verificar a capacidade dos cortes do exemplo anterior.

Definição 15.9. Seja f um fluxo e (S, \bar{S}) um corte em D . Então, $f(S, \bar{S})$ é o fluxo no corte (S, \bar{S}) e é definido por:

$$f(S, \bar{S}) = \sum_{e_j \in (S, \bar{S})^+} f(e_j) - \sum_{e_j \in (S, \bar{S})^-} f(e_j).$$

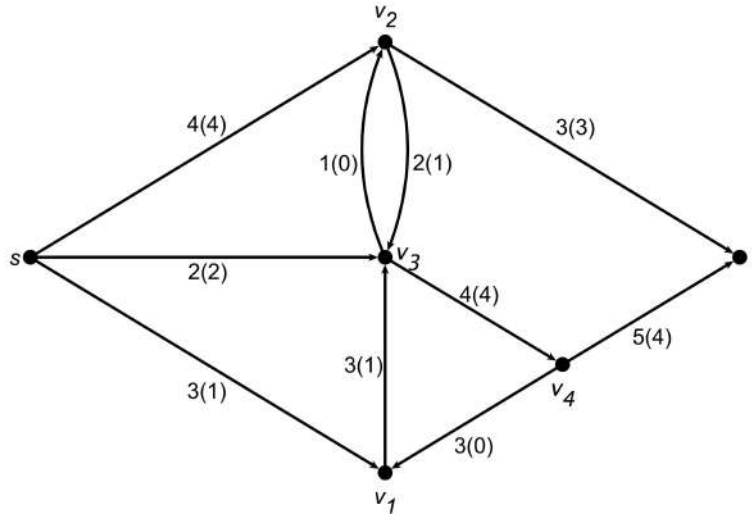


Figura 15.4: Fluxo máximo em uma rede (Szwarcfiter [21]).

Exercício. Verificar o fluxo nos cortes do exemplo anterior.

Observação 15.10. O valor do fluxo em uma rede é igual ao valor do fluxo no corte $(S, \bar{S}) = (\{s\}, V \setminus \{s\})$. Na verdade, conforme veremos no lema a seguir, o valor do fluxo em uma rede pode obtido por meio de qualquer corte. Em particular, $f(\{s\}, V \setminus \{s\}) = f(V \setminus \{t\}, \{t\}) = f(D)$.

Lema 15.11 (Szwarcfiter [21]). Seja f um fluxo em uma rede D e (S, \bar{S}) um corte em D . Então $f(S, \bar{S}) = f(D)$, ou seja, o valor do fluxo numa rede é igual ao valor do fluxo num corte qualquer de D .

Demonstração. Vamos provar por indução no tamanho de S . Se $|S| = 1$, então $S = \{s\}$ e $f(S, \bar{S}) = f(D)$, por definição. Suponhamos que $|S| > 1$ e que o resultado vale para conjuntos com até $|S| - 1$ vértices. Como $|S| > 1$, existe $v \in S$, $v \neq s$. Seja $S' = S \setminus \{v\}$. Então

$$\begin{aligned}
 f(S, \bar{S}) &= f(S, \bar{S})^+ - f(S, \bar{S})^- \\
 &= [f(v, \bar{S}) + [f(S', \bar{S}')^+ - f(S, v)]] \\
 &\quad - [f(\bar{S}, v) + [f(S', \bar{S}')^- - f(v, S)]] \\
 &= [f(S', \bar{S}')^+ - f(S', \bar{S}')^-] \\
 &\quad + [[f(v, S) + f(v, \bar{S})] - [f(S, v) + f(\bar{S}, v)]] \\
 &= f(S', \bar{S}') = f(D),
 \end{aligned}$$

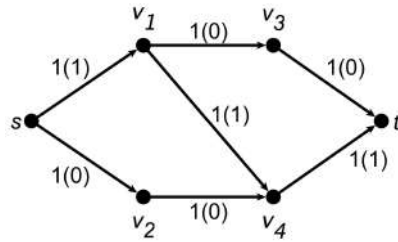
onde usamos a conservação do fluxo na penúltima igualdade e a hipótese de indução na última. \square

15.1 O Teorema do Fluxo Máximo – Corte Mínimo

Consideremos uma rede $D(V, E)$ e um fluxo f em D . Queremos obter o fluxo máximo. Então o objetivo é aumentar o valor de f , se possível. Uma aresta $e \in E$ pode receber um incremento de no máximo $c(e) - f(e)$. Talvez isso produza um aumento em $f(D)$.

Definição 15.12. *Uma aresta $e \in E$ tal que $c(e) - f(e) > 0$, denomina-se **aresta direta**.*

Considere a situação abaixo.



O fluxo não é máximo, mas não é possível aumentar $f(D)$ com incrementos em arestas diretas. Em certos casos, o único modo de aumentar $f(D)$ consiste em incrementar o fluxo em algumas arestas e decrementá-lo em outras.

Definição 15.13. *Uma aresta $e \in E$, tal que $f(e) > 0$, denomina-se **aresta contrária**.*

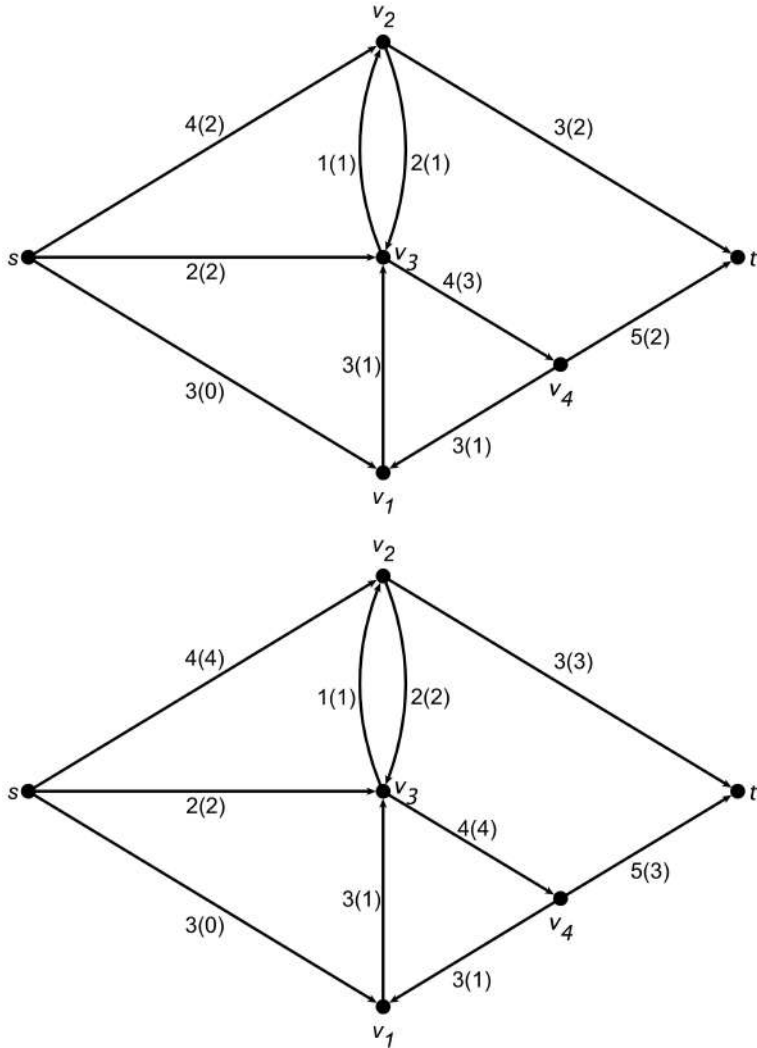
Definição 15.14. *Dado um fluxo f em uma rede $D(V, E)$, define-se a **rede residual** $D'(f)$ como sendo a rede tal que:*

- i) *O conjunto de vértices de $D'(f)$ coincide com o conjunto de vértices de D ;*
- ii) *Se (v, w) é uma aresta direta em D então (v, w) será uma aresta (também chamada direta) em $D'(f)$ com capacidade $c'(v, w) = c(v, w) - f(v, w)$;*

iii) Se (v, w) é uma aresta contrária em D , então (w, v) é uma aresta (também chamada contrária) em $D'(f)$ com capacidade $c'(w, v) = f(v, w)$.

Um caminho de s a t na rede residual é chamado de **caminho aumentante** (ou caminho de aumento de fluxo).

Exercício. Construir as redes residuais das redes abaixo. Se possível, encontre caminhos aumentantes em cada caso.



Lema 15.15 (Szwarcfiter [21]). Seja f um fluxo em uma rede $D(V, E)$ e $D'(f)$ a rede residual associada. Suponha que exista em $D'(f)$ um

caminho aumentante $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ da origem $v_1 = s$ ao destino $v_k = t$. Então o fluxo na rede pode ser aumentado de

$$F' = \min\{c'(v_j, v_{j+1}) : 1 \leq j < k\}.$$

Demonstração. Vamos construir um novo fluxo f' , a partir de f , com valor $f(D) + F'$. Defina $f'(e) = f(e)$ para toda aresta $e \in E \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Para $1 \leq j < k$,

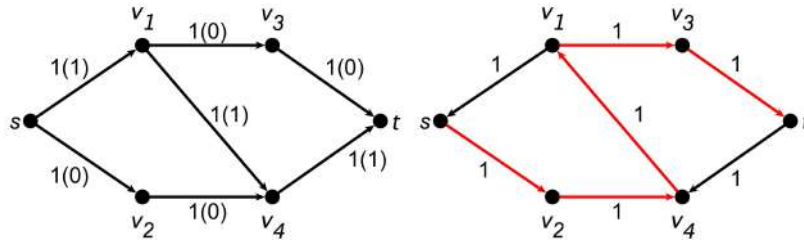
- se (v_j, v_{j+1}) é aresta direta, defina $f'(v_j, v_{j+1}) = f(v_j, v_{j+1}) + F'$;
- se (v_j, v_{j+1}) é aresta contrária, defina $f'(v_{j+1}, v_j) = f(v_{j+1}, v_j) - F'$.

Como F' é a menor dentre as capacidades das arestas do caminho aumentante, temos claramente que $0 \leq f'(e) \leq c(e)$ para toda aresta $e \in E$. Por construção, há a conservação do fluxo, uma vez que em ambos os casos acima o fluxo no vértice v_{j+1} recebeu F' unidades adicionais. Logo f' é, de fato, um fluxo. Pelo lema anterior temos que

$$\begin{aligned} f'(D) &= f'(\{s\}, V \setminus \{s\}) = \sum_{v \in V \setminus \{s\}} f'(s, v) - \sum_{v \in V \setminus \{s\}} f'(v, s) \\ &= \sum_{v \in V \setminus \{s, v_2\}} f'(s, v) + f'(s, v_2) \\ &= \sum_{v \in V \setminus \{s, v_2\}} f(s, v) + [f(s, v_2) + F'] \\ &= \sum_{v \in V \setminus \{s\}} f(s, v) + F' = f(D) + F'. \end{aligned}$$

□

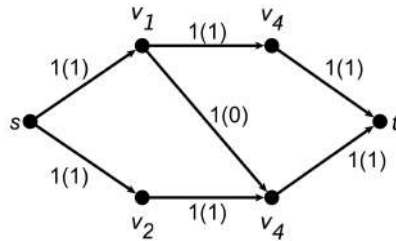
Exemplo 15.16. Na figura abaixo temos um fluxo e a rede residual correspondente:



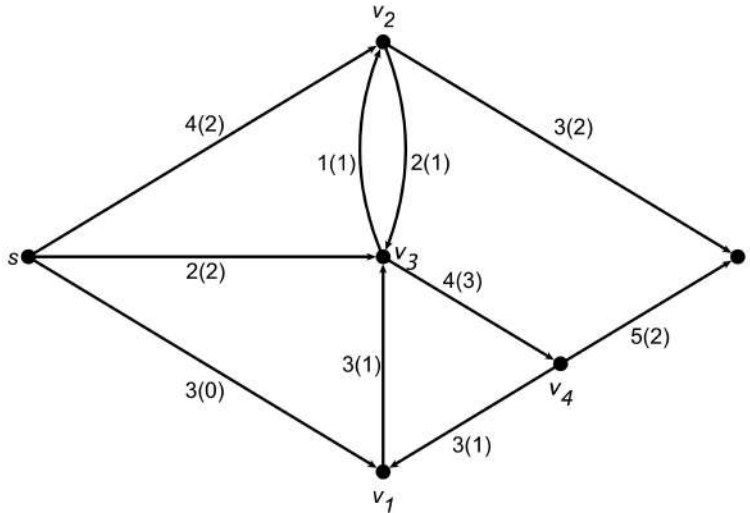
Temos que $\{s, v_2, v_4, v_1, v_3, t\}$ é um caminho aumentante para o qual $F' = 1$. Temos ainda que:

- (s, v_2) , (v_2, v_4) , (v_1, v_3) e (v_3, t) são arestas diretas \rightarrow incrementar o fluxo em cada uma delas em $F' = 1$ unidades;
- (v_4, v_1) é aresta contrária \rightarrow decrementar o fluxo em $F' = 1$ unidades.

Com essas alterações, obtemos o fluxo abaixo.



Exercício. Repetir o exemplo para o fluxo abaixo.



Observação 15.17. Note que o valor do fluxo na rede não pode ultra-

passar a capacidade de qualquer corte (S, \bar{S}) . De fato,

$$\begin{aligned} f(D) = f(S, \bar{S}) &= \sum_{e_j \in (S, \bar{S})^+} f(e_j) - \sum_{e_j \in (S, \bar{S})^-} f(e_j) \\ &\leq \sum_{e_j \in (S, \bar{S})^+} f(e_j) \leq \sum_{e_j \in (S, \bar{S})^+} c(e_j) \\ &= c(S, \bar{S}) \quad \forall (S, \bar{S}). \end{aligned}$$

Em particular, se (S, \bar{S}) é o corte mínimo, obtemos

$$F = f(D) = f(S, \bar{S}) \leq c_{\min}.$$

Teorema 15.18 (Teorema do Fluxo Máximo – Corte Mínimo, Szwarcfiter [21]). *O valor do fluxo máximo em uma rede $D(V, E)$ é igual à capacidade do corte mínimo de D .*

Demonstração. Seja f um fluxo máximo em D . Então, $c(S, \bar{S}) \geq f_{\max}(D)$ para todo corte (S, \bar{S}) . Seja D' a rede residual de f . Segue do lema anterior que, pelo fato de f ser máximo, não existe caminho aumentante. Seja S o conjunto de vértices alcançáveis em D' a partir de s . É claro que $s \in S$ e $t \in \bar{S}$. Além disso,

- D' não possui aresta direta de S para \bar{S} , ou seja, $f(e) = c(e)$ para toda $e \in (S, \bar{S})^+$;
- D' não possui aresta contrária de S para \bar{S} , ou seja, $f(e) = 0$ para toda $e \in (S, \bar{S})^-$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} f(D) = f(S, \bar{S}) &= \sum_{e \in (S, \bar{S})^+} f(e) - \sum_{e \in (S, \bar{S})^-} f(e) \\ &= \sum_{e \in (S, \bar{S})^+} c(e) = c(S, \bar{S}). \end{aligned}$$

Portanto, (S, \bar{S}) é o corte mínimo. Assim, $f_{\max}(D) = f(D) = c(S, \bar{S}) = c_{\min}$. \square

Corolário 15.19 (Szwarcfiter [21]). *Sejam (S, \bar{S}) um corte e f um fluxo em uma rede D . Então (S, \bar{S}) é mínimo se, e somente se,*

- (i) toda aresta em $(S, \bar{S})^+$ estiver saturada, e
- (ii) toda aresta em $(S, \bar{S})^-$ possui fluxo nulo.

Corolário 15.20 (Szwarcfiter [21]). *Um fluxo em uma rede $D(V, E)$ é máximo se, e somente se, não existe caminho aumentante na rede residual associada.*

Observação 15.21. *Estes resultados foram usados por Ford e Fulkerson para definir um algoritmo para resolver o problema de fluxo máximo em redes (e.g. Boaventura [4], Szwarcfiter [21]).*

15.2 O Algoritmo de Ford e Fulkerson

Abaixo temos o Algoritmo de Fluxo Máximo em redes (Ford e Fulkerson, 1956, 1957, 1962):

Dados de entrada: Uma rede $D(V, E)$ com $c(e) > 0 \forall e \in E$, um vértice origem s e um vértice destino t .

Início

$$F = 0$$

Para toda $e \in E$ faça $f(e) = 0$

Construa a rede residual $D'(f)$

enquanto existir um caminho v_1, v_2, \dots, v_k de $v_1 = s$ a $v_k = t$ em $D(f)$ faça:

$$F' = \min\{c'(v_j, v_{j+1}), 1 \leq j < k\}$$

para $j = 1, \dots, k$ faça:

se (v_j, v_{j+1}) é aresta direta então $f(v_j, v_{j+1}) = f(v_j, v_{j+1}) + F'$

caso contrário $f(v_{j+1}, v_j) = f(v_{j+1}, v_j) - F'$

fim para

$$F = F + F'$$

Construa a nova rede residual $D(f)$

fim enquanto

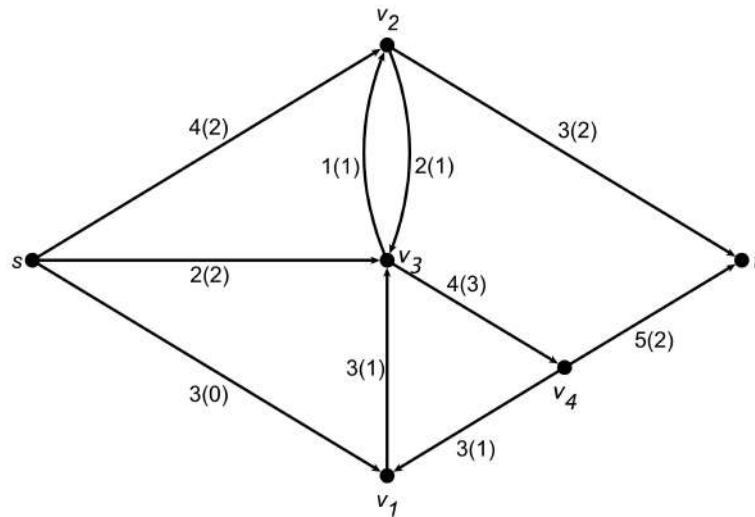
fim

Exercícios.

Lista baseada na referência

R.J. Wilson and J.J. Watkins, *Graphs – An Introductory approach*, J. Wiley, 1990 (vide ref. [26]).

1. Aplicar o algoritmo na rede abaixo.



2. Resolva o problema de fluxo máximo considerando a rede exibida na Figura 15.5. Discuta a complexidade computacional do Algoritmo de Fluxo Máximo de Ford e Fulkerson usando esta rede como exemplo.
3. Verificar que para determinar o **corte mínimo** na rede associado ao fluxo máximo basta fazer:

Seja f o fluxo máximo na rede. Então o corte mínimo é dado por:

- (i) $s \in S$
- (ii) Se $v_i \in S$ e $f(v_i, v_j) < c(v_i, v_j)$, então $v_j \in S$.
- (iii) Se $v_i \in S$ e $f(v_j, v_i) > 0$, então $v_j \in S$.

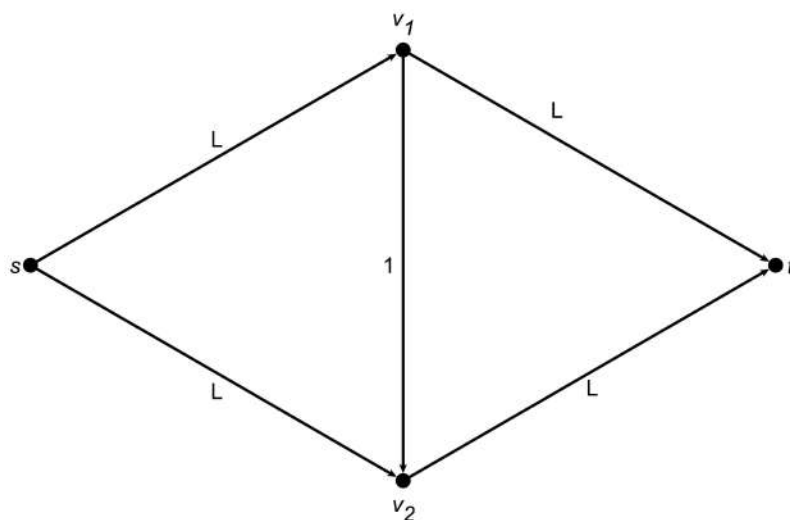
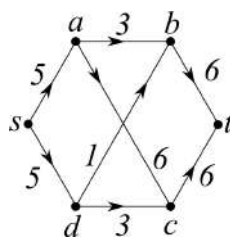


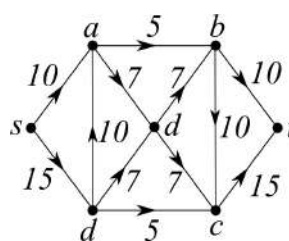
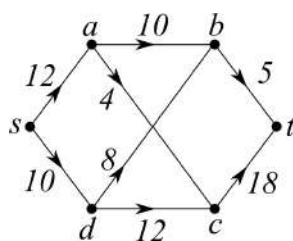
Figura 15.5: Pior caso – Algoritmo de Ford e Fulkerson (Szwarcfiter [21])

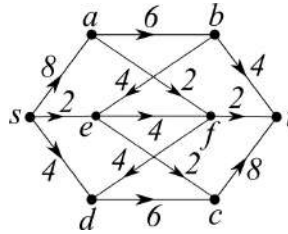
Maiores detalhes ver na página 157 de Boaventura [4] e o Capítulo 6 de Szwarcfiter [21].

4. Aplique o algoritmo de Ford-Fulkerson à rede abaixo.

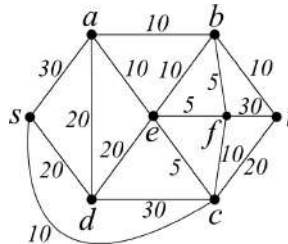


5. Encontre um fluxo máximo e um corte mínimo nas seguintes redes:





6. Suponha que o grafo abaixo represente uma rede de linhas telefônicas, onde a capacidade de cada aresta é o número de chamadas que a linha suporta. Qual é o número máximo de chamadas entre as localidades s e t que a rede suporta?

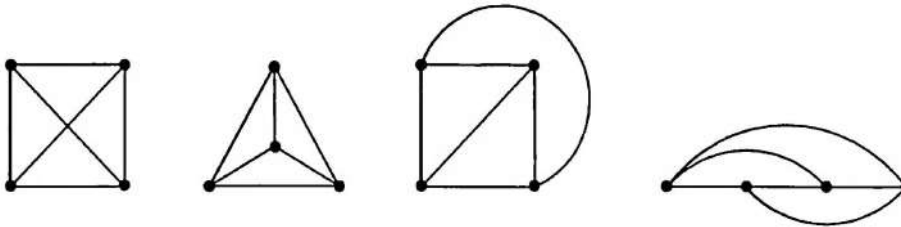


7. Prove que o valor do fluxo em qualquer corte de uma rede é não-negativo.
8. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, provando-as no caso de serem verdadeiras e dando um contra-exemplo no caso de serem falsas.
- Seja D uma rede. Em todo fluxo máximo em D o fluxo em cada aresta contrária é nulo.
 - Seja D uma rede e (S, \bar{S}) um corte mínimo de D . Para todo fluxo f maximal e não-máximo em D , existe $e \in (S, \bar{S})^-$ tal que $f(e) > 0$.
 - Seja f um fluxo em uma rede $D(V, E)$ com origem s e destino t . Seja $S \subseteq V$ com $s, t \notin S$. Então $f(S, \bar{S}) = 0$.

Capítulo 16

Grafos Planares

Neste capítulo queremos responder à seguinte questão: Dado um grafo G , é possível encontrar uma representação gráfica para o grafo tal que não haja cruzamento de arestas? Considere por exemplo o grafo K_4 representado graficamente na figura abaixo.

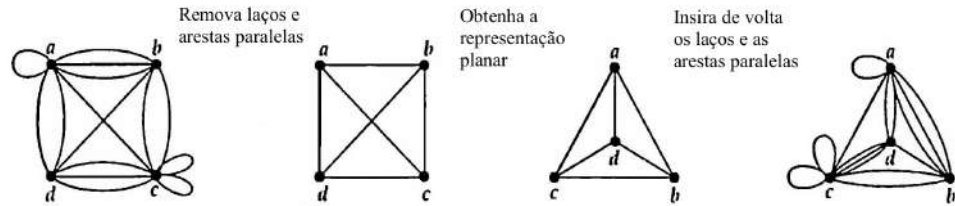


Definição 16.1. Um grafo G é dito **planar** se puder ser representado graficamente no plano de tal forma que não haja cruzamento de suas arestas, exceto nos vértices aos quais elas são incidentes. Caso contrário, o grafo é dito não-planar.

Usaremos o termo grafo plano para uma representação planar de um grafo planar.

Exemplo 16.2. O grafo à esquerda na figura anterior é um grafo planar; os outros grafos exibidos na mesma figura são grafos planos.

Observação 16.3. No estudo de grafos planares podemos restringir a atenção a grafos simples.



Observação 16.4. Se existir uma representação do grafo em uma superfície sem que haja cruzamento de arestas, dizemos que existe uma imersão do grafo na superfície.

Questão: Como determinar então se um dado grafo é planar?

Existem dois grafos não planares que são muito importantes no estudo de planaridade. Estes dois grafos são chamados Grafos de Kuratowski e serão apresentados a seguir.

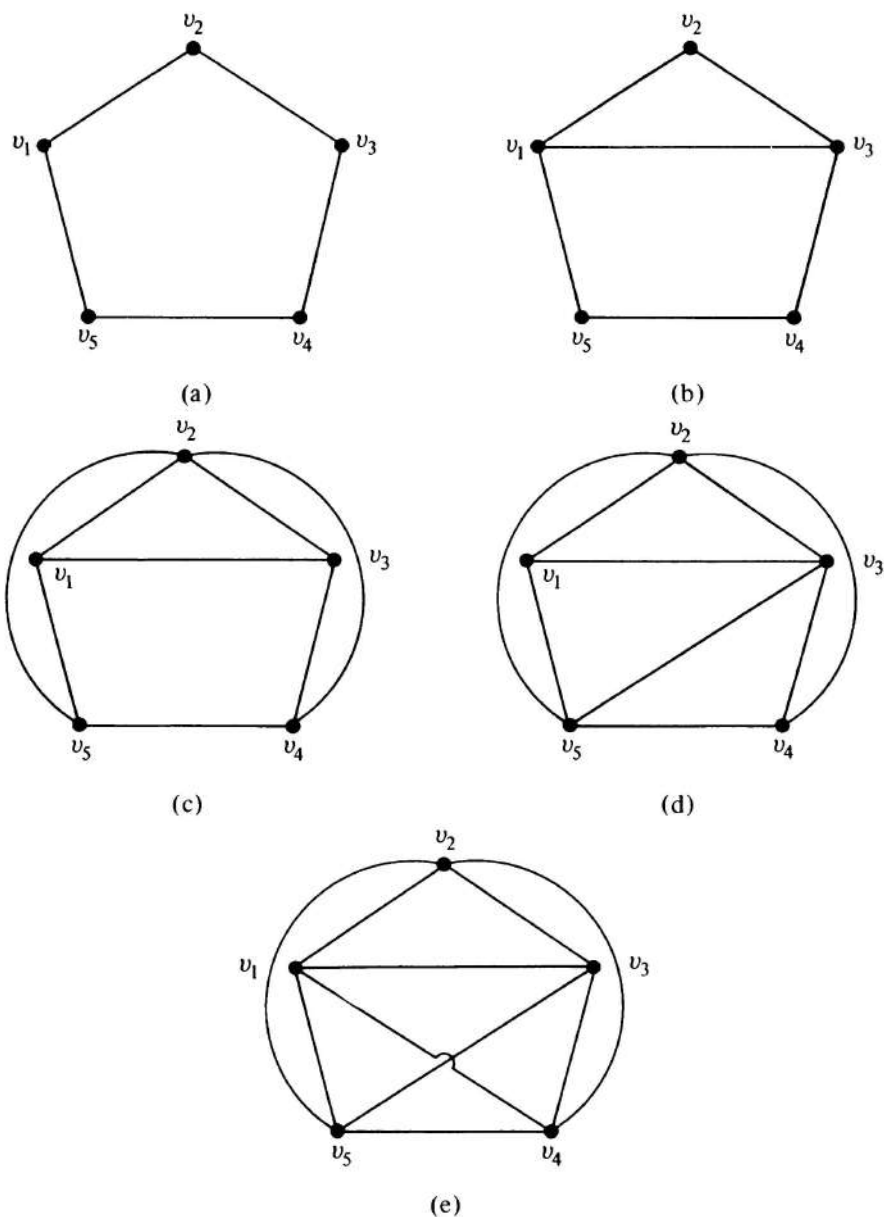
Teorema 16.5. O grafo K_5 é um grafo não-planar.

Demonstração. (Para demonstrar este teorema usaremos uma metodologia que pode ser bastante útil na obtenção de uma representação planar de um grafo planar ou na prova de que tal representação não pode ser encontrada.)

Vamos considerar o grafo $G = K_5$. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 os cinco vértices deste grafo. Como o grafo é completo, podemos encontrar um circuito hamiltoniano em G .

- Seja, por exemplo, o seguinte circuito: $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.
- Vamos acrescentar aresta (v_1, v_3) ;
- Ao acrescentar as arestas (v_2, v_5) e (v_2, v_4) , observamos que não temos escolha e que é necessário inclui-las externamente;
- A aresta (v_3, v_5) pode ser acrescentada internamente;
- Ao tentarmos incluir a última aresta do grafo (v_1, v_4) verificamos que não é possível inclui-la sem que haja cruzamento de arestas.

Portanto o grafo K_5 é não-planar. \square

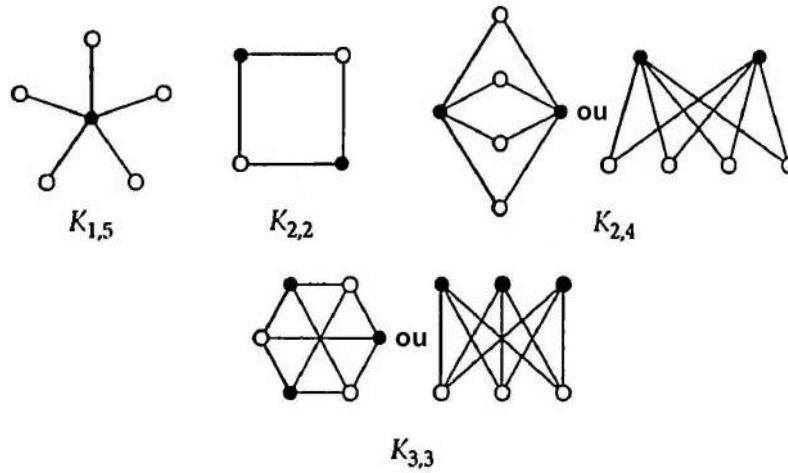


Para apresentar o próximo grafo de Kuratowski vamos relembrar a definição de grafo bipartido.

Definição 16.6. Um grafo $G(V, A)$ é **bipartido** quando o seu conjunto de vértices, V , puder ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que toda aresta de G tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2 .

Um grafo **bipartido completo** possui uma aresta para cada par de vértices $v_i \in V_1$ e $v_j \in V_2$. Se n_1 é o número de vértices em V_1 e n_2 é o número de vértices em V_2 , o grafo bipartido completo é denotado por K_{n_1, n_2} .

Abaixo temos alguns exemplos de grafos bipartidos:



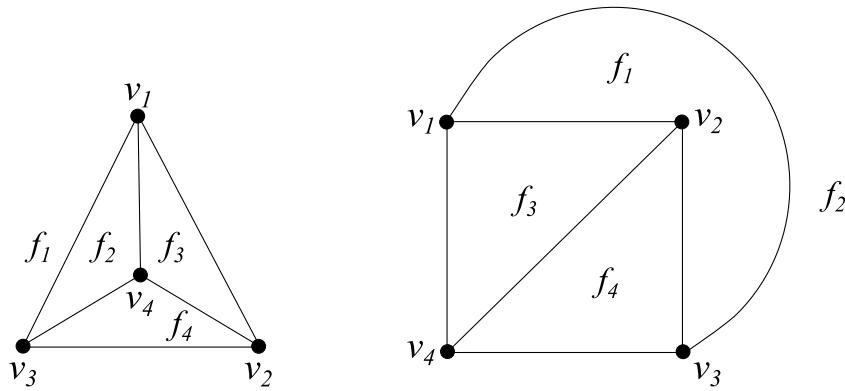
Teorema 16.7. O grafo $K_{3,3}$ é um grafo não-planar.

Demonstração. É possível demonstrar este teorema usando o mesmo argumento da prova do teorema anterior. \square

Questão: O que estes dois grafos K_5 e $K_{3,3}$ possuem em comum?

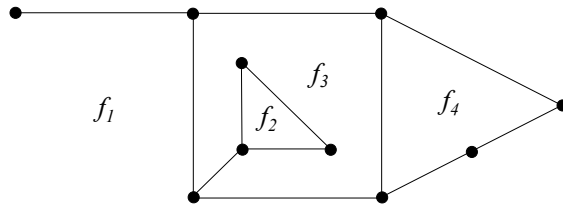
1. São grafos regulares;
2. Os dois são não-planares;
3. A remoção de uma aresta ou um vértice torna o grafo planar;
4. K_5 é não-planar com o menor número de vértices;
5. $K_{3,3}$ é não-planar com o menor número de arestas.

Observe que um grafo plano divide o plano em diversas regiões:



Definição 16.8. Se G é um grafo planar, então toda representação planar de G divide o plano em regiões, chamadas **faces**. Uma destas faces é ilimitada, e é chamada **face infinita**. Se f é uma face qualquer, o grau de f , denotado por $d(f)$, é igual ao número de arestas contida na trilha fechada que a define.

Exemplo 16.9. Graus das faces de um grafo plano:



- $d(f_1) = 8$;
- $d(f_2) = 3$;
- $d(f_3) = 9$;
- $d(f_4) = 4$.

Lema 16.10. Seja G um grafo planar com m arestas e f faces. Então,

$$\sum_{i=1}^f d(f_i) = 2m.$$

Demonstração. Como cada aresta de um grafo G pertence a no máximo duas faces distintas ou está incluída duas vezes na trilha fechada que define uma face, o resultado segue. \square

O número de faces de um grafo também está relacionado com o número de arestas e vértices do grafo através do teorema abaixo.

Teorema 16.11 (Fórmula de Euler). *Se G é um grafo conexo planar com m arestas e n vértices, então qualquer representação planar de G possui $f = m - n + 2$ faces.*

Demonstração. A prova será feita por indução no número de faces f .

Se $f = 1$, então G não possui ciclos, ou seja, G é uma árvore. Temos que $m - n + 2 = (n - 1) - n + 2 = 1 = f$. Logo, o resultado vale para $f = 1$.

Suponha que o resultado vale para grafos com menos que f faces. Seja G um grafo conexo planar com $f > 1$ faces. Escolha uma aresta e de G que não seja uma ponte (se tal aresta não existe, G seria uma árvore; vimos que o resultado vale para árvores). Considere o grafo $H = G - e$. Como e não é uma ponte, a sua remoção mantém o grafo conexo. Assim, e necessariamente pertence a um ciclo. Logo, a remoção de e une duas regiões, de modo que o número de faces é reduzido em uma unidade. Como H possui menos que f faces, segue da hipótese de indução que $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$, de onde segue o resultado. \square

Observação 16.12. *O número f de faces de um grafo planar é sempre o mesmo e independe da representação planar obtida.*

Exemplo 16.13. *Quantas faces existem em grafo planar com 10 vértices, cada um dos vértices com grau 3?*

Inicialmente precisamos definir quantas arestas o grafo possui:

$$\sum_{i=1}^{10} d(v_i) = 2m \Rightarrow m = \frac{10 * 3}{2} = 15.$$

Aplicando a fórmula de Euler, $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$, sabemos que o grafo terá 7 faces.

Corolário 16.14. *Seja G um grafo simples, conexo e planar com m arestas e $n \geq 3$ vértices. Então, $m \leq 3n - 6$.*

Demonstração. Como G é simples, conexo e planar com $n \geq 3$, o grau de cada face é no mínimo 3. Assim,

$$2m = \sum_{i=1}^f d(f_i) \geq \sum_{i=1}^f 3 = 3f.$$

Logo, $m - n + 2 = f \leq 2m/3$, de modo que, $m \leq 3n - 6$. \square

Exercício. Seja G um grafo simples, conexo e planar com m arestas e $n \geq 3$ vértices. Mostre que G possui ao menos um vértice v tal que $d(v) \leq 5$.

Observação 16.15. Observe que o grafo K_5 não satisfaz o corolário anterior e portanto não é planar. O grafo $K_{3,3}$ satisfaz o corolário, porém não é planar. Assim temos uma condição necessária mas não suficiente.

Questão: Como fazer então para determinar se um dado grafo é planar?

Corolário 16.16. Seja G um grafo simples, conexo e planar com m arestas, n vértices e nenhum circuito de tamanho 3. Então, $m \leq 2n - 4$.

Demonstração. Como G é simples, conexo, planar e não possui triângulos, o grau de cada face é no mínimo 4. Assim,

$$2m = \sum_{i=1}^f d(f_i) \geq \sum_{i=1}^f 4 = 4f.$$

Logo, $m - n + 2 = f \leq m/2$, de modo que, $m \leq 2n - 4$. \square

Observação 16.17. O grafo $K_{3,3}$ não satisfaz o corolário e portanto não é planar. Aqui temos uma outra condição necessária. É suficiente?

Questão: Como fazer então para determinar se um dado grafo é planar?

O algoritmo de redução (Procedimento 1, a seguir) pode auxiliar nesta tarefa. Mas antes precisamos definir “arestas em série” e lembrar o conceito de fusão de arestas.

Definição 16.18. Duas arestas estão em **série** se elas possuem exatamente um vértice em comum e este vértice tem grau dois.

Definição 16.19. A **fusão** de duas arestas incidentes em um vértice v_j , (v_i, v_j) e (v_j, v_k) , é feita eliminando-se as duas arestas e criando a aresta (v_i, v_k) .

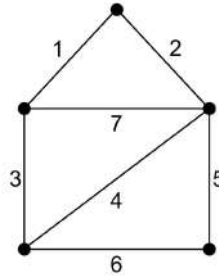
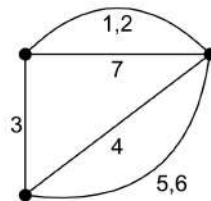
Procedimento 1 – Procedimento de redução**Passo 1:** Determine as componentes do grafo.

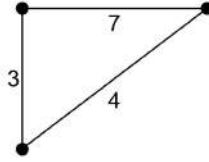
$$G = G_1, G_2, \dots, G_k.$$

Teste cada componente G_i do grafo.

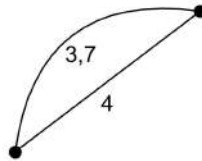
Passo 2: Remova todos os loops.**Passo 3:** Elimine as arestas paralelas, deixando no máximo uma aresta entre cada par de vértices.**Passo 4:** Elimine os vértices de grau dois através da fusão de duas arestas.

(Arestas em série não afetam a planaridade).

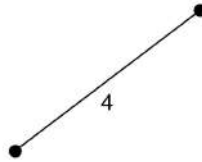
Passo 5: Repita os passos 3 e 4 enquanto for possível.**Exemplo 16.20.** *Vamos aplicar o procedimento de redução ao seguinte grafo:**Passo 1:* $G_1 = G$.*Passo 2:* G_1 não possui loops.*Passo 3:* G_1 não possui arestas paralelas.*Passo 4:* Vamos fazer a fusão das arestas 1 e 2 e das arestas 5 e 6:*Repetindo: Passo 3:* Vamos remover as arestas 1,2 e 5,6.



Passo 4: Temos



Repetindo: Passo 3: Temos o seguinte grafo reduzido:



De uma maneira geral, após aplicar o Procedimento 1 a cada uma das componentes G_i , qual será o grafo reduzido, H_i ?

Teorema 16.21 (N. Deo, Graph Theory). *O grafo reduzido H_i é:*

- a) *uma aresta; ou*
- b) *um grafo completo com 4 vértices; ou*
- c) *um grafo simples com $n \geq 5$ e $m \geq 7$.*

Demonstração. Exercício. (O teorema pode ser provado considerando todos os grafos conexos simples com seis arestas ou menos.) \square

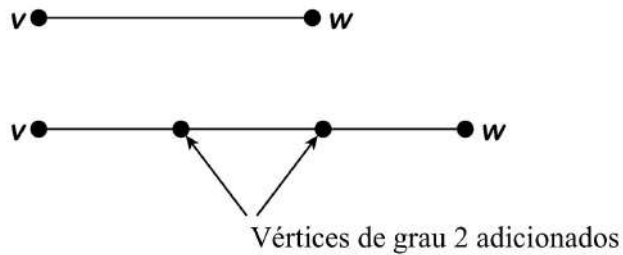
Se todos os grafos reduzidos H_i satisfizerem os itens a) ou b), o grafo G é planar. Caso contrário é necessário verificar se $m \leq 3n - 6$ ou $m \leq 2n - 4$. Se o grafo reduzido não satisfaz uma (ou ambas) destas inequações então o grafo G é não planar. Se as inequações forem satisfeitas, é necessário fazer testes adicionais.

Observação 16.22. Usando o Procedimento 1 e o teorema anterior podemos identificar claramente a planaridade de um grafo para casos onde o grafo tem menos que 5 vértices e menos que 7 arestas.

Para grafos com $n \geq 5$ e $m \geq 7$ e que satisfaçam a condição dos corolários precisamos de outros resultados.

Definição 16.23. A **subdivisão** da aresta (v, w) de um grafo G é uma operação que transforma a aresta (v, w) em um caminho através da adição de vértices de grau 2.

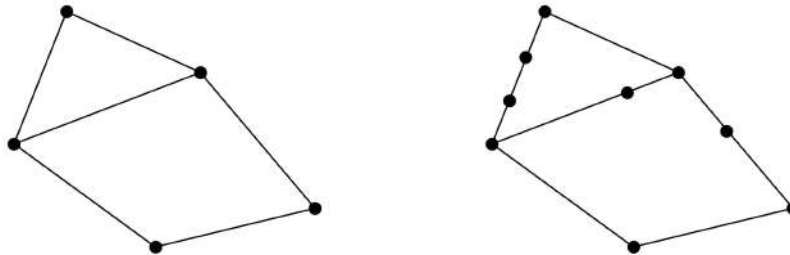
Exemplo: Subdivisão de uma aresta.

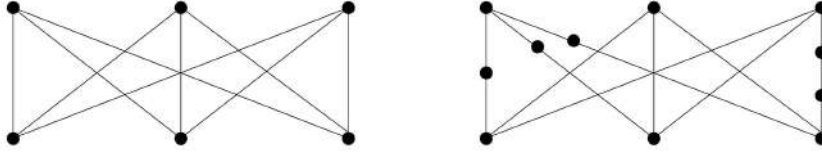


Definição 16.24. Um grafo G_2 é uma **subdivisão** de um grafo G_1 quando G_2 puder ser obtido de G_1 através de uma sequência de divisões das arestas de G_1 .

Dizemos que G_2 é uma **configuração** de G_1 .

Exemplos: Subdivisão de um grafo.



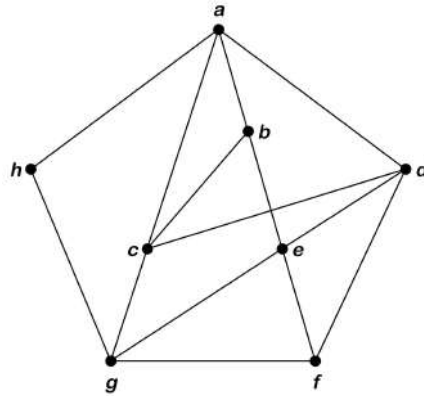


O Teorema a seguir foi demonstrado pela primeira vez pelo matemático polonês Kuratowski em 1930.

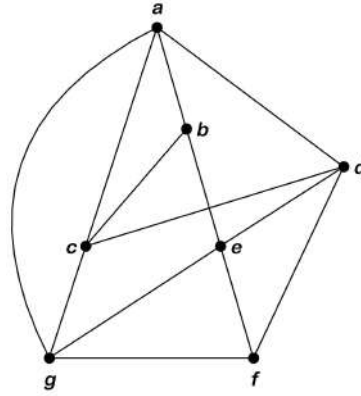
Teorema 16.25. *Um grafo G é planar se, e somente se, não contém um subgrafo que é uma configuração do grafo K_5 ou do grafo $K_{3,3}$.*

Demonstração. Ver, por exemplo, C. Berge, The Theory of Graphs and its Applications, vide referência [3]. \square

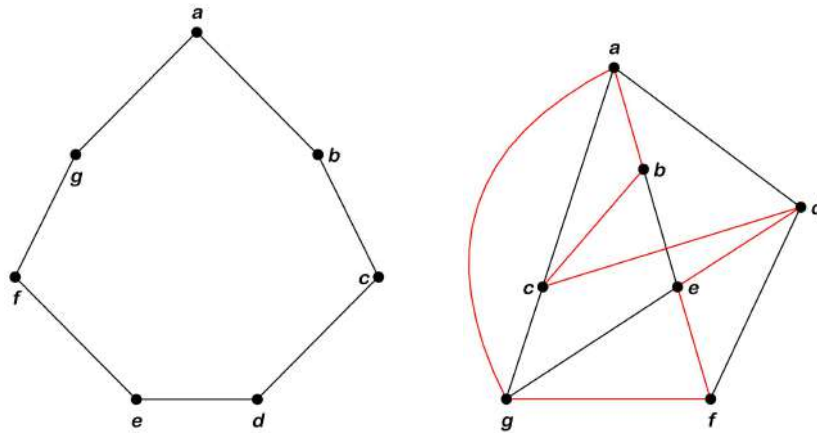
Exemplo 16.26. *Vamos verificar se o grafo abaixo é planar.*



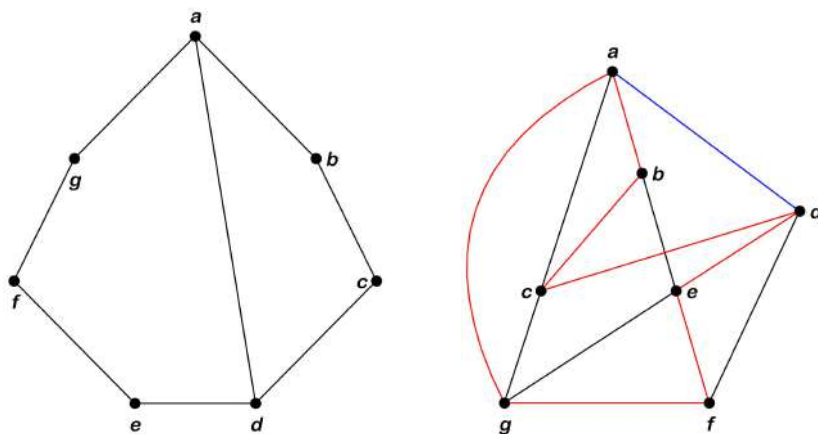
Podemos aplicar o procedimento de redução pois o grafo contém vértices de grau 2. Vamos então eliminar o vértice h através da fusão das arestas (a, h) e (h, g) . O grafo resultante após a aplicação do procedimento de redução é:



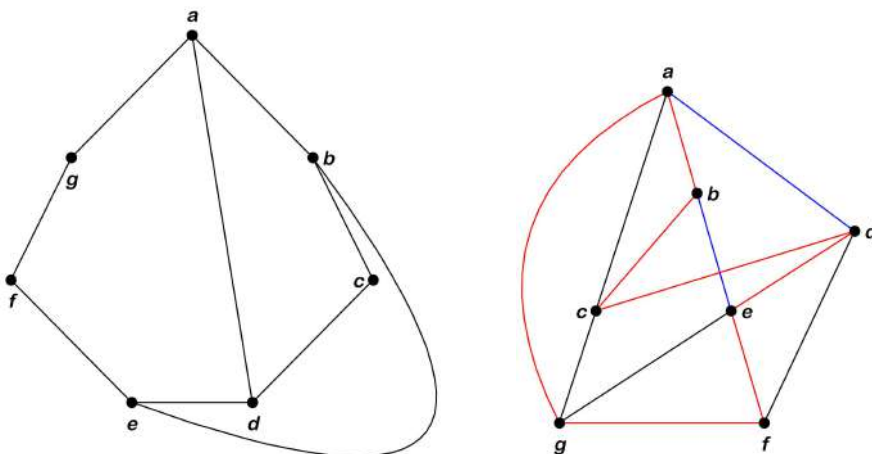
Vamos verificar o primeiro corolário: $m = 13 \leq 15 = 3 \cdot 7 - 6 = 3n - 6$. Como o grafo satisfaz o corolário não podemos afirmar nada. O segundo corolário não pode ser aplicado, pois o grafo possui triângulos. Vamos então aplicar o procedimento de construção de circuitos e tentar obter uma representação planar para este grafo. Vamos determinar o circuito mais longo neste grafo. Considere o circuito $\{a, b, c, d, e, f, g, a\}$.



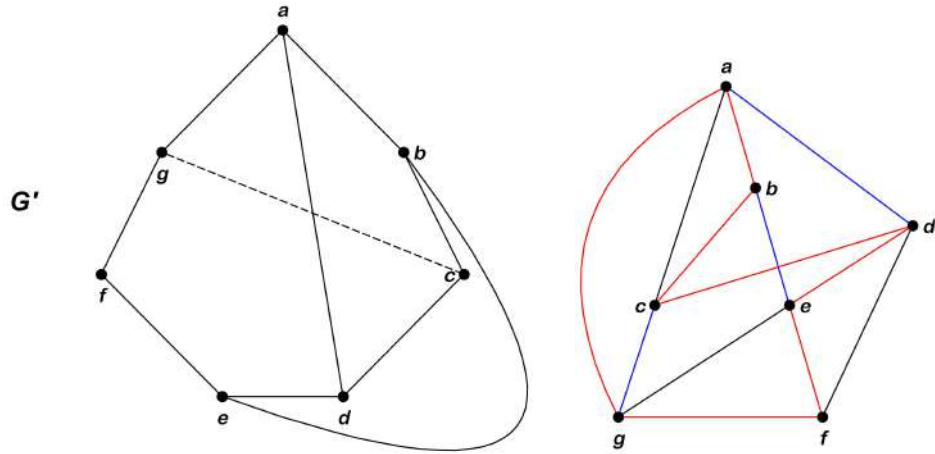
Vamos iniciar o procedimento inserindo, por exemplo, a aresta (a, d) :



Para inserir a aresta (b,e) temos apenas uma opção, inserir fora do circuito:



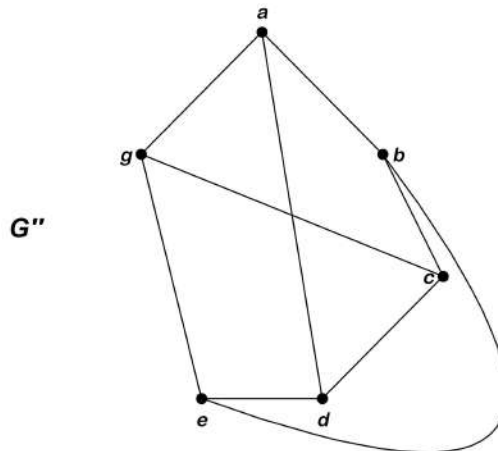
Observe agora que a aresta (c,g) não pode ser desenhada fora, ou dentro do circuito:



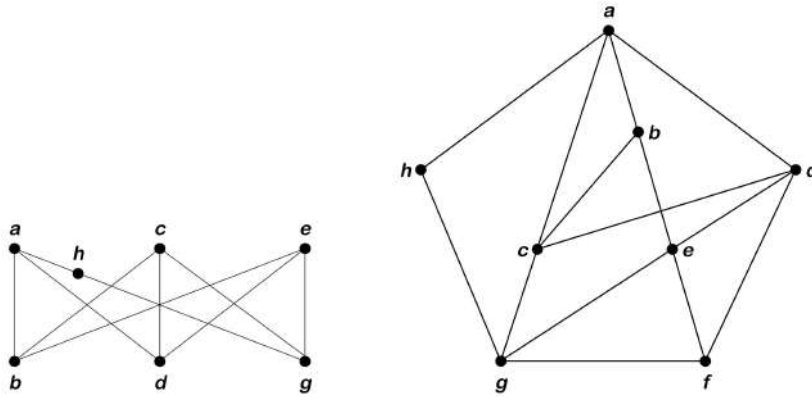
Assim podemos dizer que o grafo dado não é planar.

Vamos agora encontrar uma configuração do $K_{3,3}$ ou do K_5 no grafo G . De acordo com o Teorema de Kuratowski, se o grafo é não-planar devemos encontrar uma. Como fazer?

Para identificar a configuração do $K_{3,3}$ vamos eliminar do subgrafo G' os vértices de grau 2, através da fusão das arestas (g, f) e (f, e) :

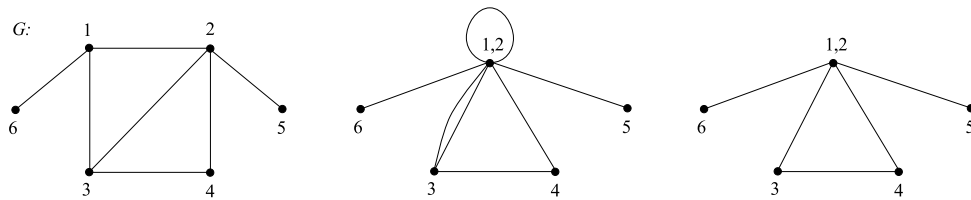


O grafo reduzido G'' é o $K_{3,3}$. Basta tomar $V_1 = \{a, c, e\}$ e $V_2 = \{b, d, g\}$. O subgrafo de G que é uma configuração do $K_{3,3}$ é então:



Definição 16.27. A fusão de um par de vértices v e w em um grafo G é feita substituindo os dois vértices por um único vértice v,w , de tal forma que toda aresta que era incidente no vértice v e/ou no vértice w passa a ser incidente no novo vértice v,w .

Definição 16.28. A contração de dois vértices v e w é feita através da fusão dos vértices v e w e a remoção dos loops e arestas paralelas que são formadas no processo.



Definição 16.29. A **contração** de um grafo é o resultado de uma sequência de contração de seus vértices.



Teorema 16.30. Um grafo G é planar se, e somente se, G não contém um subgrafo que possui K_5 ou $K_{3,3}$ como uma contração.

Demonstração. Ver R. Wilson, Introduction to Graph Theory, vide referência [25]. \square

Exemplo 16.31. *O Grafo de Petersen não é planar.*

Algoritmos

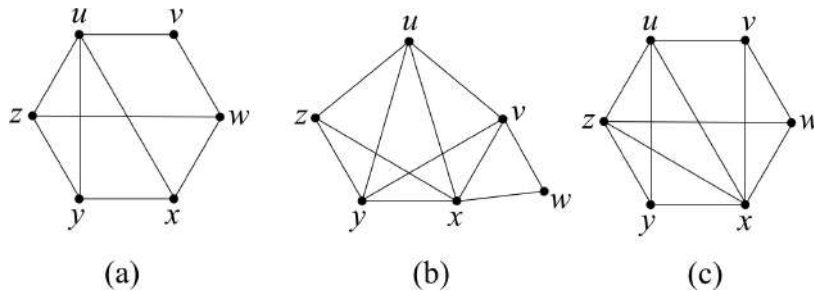
Algoritmos para verificar se um dado grafo é planar e em caso positivo exibir uma representação planar do grafo:

1. Algoritmo de Hopcroft e Tarjan em [10] “Teoria do grafos - Algoritmos”, Antonio Luiz Furtado, L.T.C. Editora, 1973.
2. Algoritmo de Demoucron et al. em [16] “Algorithmic Graph Theory”, J.A. Machugh, Prentice Hall, 1990.
3. Vários algoritmos em [13] “Algoritmos Lineares para Teste de Planaridade em Grafos”, Edna Ayako Hoshino. Dissertação de Mestrado, UFMS. Disponível em:
http://facom.sites.ufms.br/files/2015/12/2002___edna_ayako.pdf
(última visita: 30/05/2016).
4. Outros algoritmos em [20]: Teste de planaridade e seus principais algoritmos, José Coelho de Pina, IME-USP. Disponível em:
<http://www.ime.usp.br/~coelho/sh/introp.html#hopcroft:jacm-21-549>
(última visita: 30/05/2016).

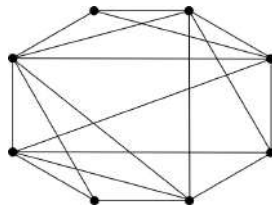
Exercícios.

1. Em cada um dos casos abaixo, determine os valores de n (número de vértices), m (número de arestas), e f (número de faces) considerando que o grafo seja planar. Desenhe, se possível, um grafo simples, conexo e planar que satisfaça a propriedade ou explique porque um grafo planar com tal propriedade não existe.
 - (a) 7 vértices e 13 arestas;
 - (b) 6 vértices e 8 faces;
 - (c) 13 arestas e 9 faces;
 - (d) 6 vértices e 14 arestas;
 - (e) 5 faces 10 arestas;

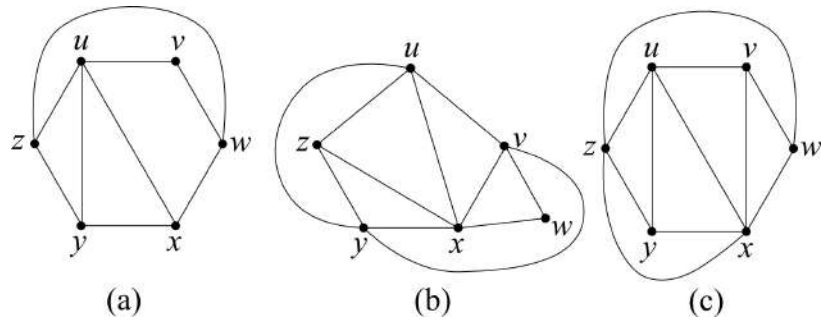
- (f) 6 vértices com grau 4;
 (g) 7 vértices com grau 3;
 (h) 5 faces todas limitadas por 4 arestas.
2. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.
- (a) Todo subgrafo de um grafo planar é planar.
 (b) Todo subgrafo de um grafo não planar é não planar.
 (c) Todo grafo que contém um subgrafo planar é planar.
 (d) Todo grafo que contém um subgrafo não planar é não planar.
3. Mostre que os seguintes grafos são planares encontrando uma representação planar:



4. Mostre que o seguinte grafo é planar encontrando uma representação planar:



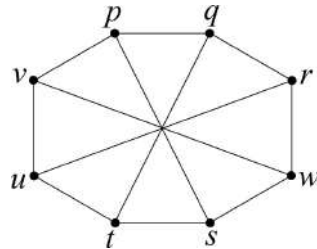
5. Verifique a fórmula de Euler para cada um dos grafos abaixo:



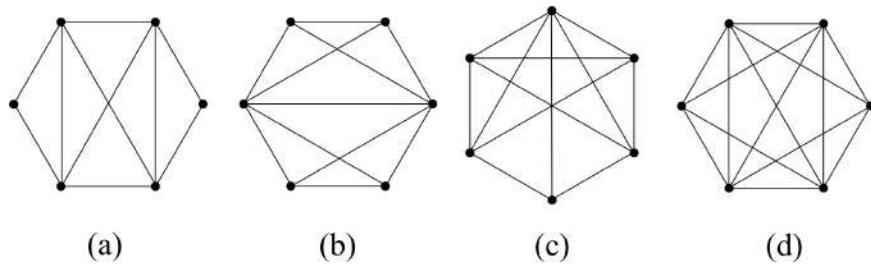
6. Dê exemplos de:

- (a) um grafo planar simples em que todo vértice tem grau 5;
- (b) um grafo planar com grau mínimo 3 no qual toda face tem grau 5;
- (c) um grafo planar no qual todo vértice tem grau 6;
- (d) um grafo planar em que toda face tem grau 6.

7. Use o Teorema de Kuratowski para provar que o seguinte grafo não é planar:



8. Quais dos seguintes grafos são planares?

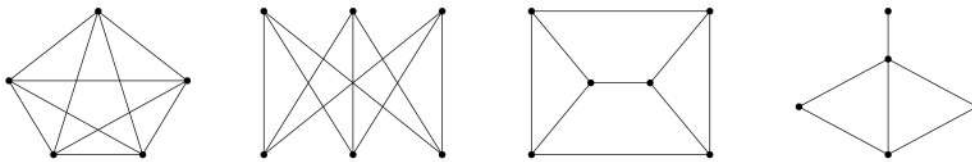


Para aqueles que são planares, dê uma representação planar e verifique a fórmula de Euler. Para aqueles que não são planares, verifique o Teorema de Kuratowski encontrando subgrafos apropriados.

Capítulo 17

Coloração de Vértices

Considere cada um dos grafos abaixo:

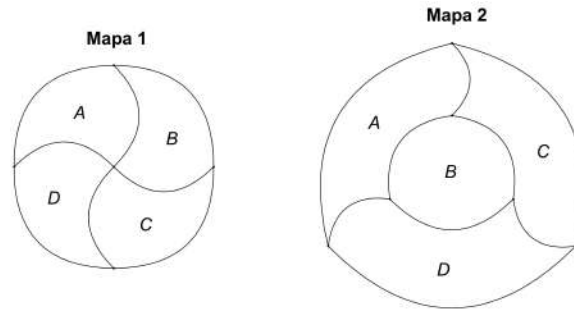


- Quantas cores são necessárias para colorir os vértices destes grafos de maneira que dois vértices adjacentes não recebam a mesma cor?
- Qual é o número mínimo de cores necessárias?
- Considerando as cores usadas no item b) agrupe os vértices que receberam a mesma cor.
- Pense em algum problema prático que você pudesse resolver usando a partição dos vértices obtidas acima.

Aplicações:

Coloração de mapas

Considere os mapas abaixo:



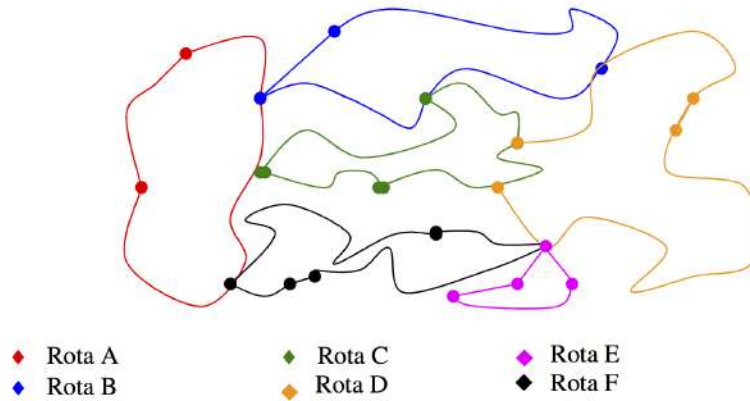
Qual é o menor número de cores necessário para pintar os mapas de forma que duas regiões adjacentes não recebam a mesma cor? Duas regiões são adjacentes se elas possuem uma linha de fronteira em comum. Note que no Mapa 1 as regiões A e C possuem apenas um ponto em comum e portanto não são adjacentes. Vamos representar os mapas através de grafos, com os vértices sendo as regiões do mapa; existe uma aresta entre dois vértices se as duas regiões correspondentes são adjacentes.

Problema das 4 cores

Quatro cores são suficientes para colorir as regiões de qualquer mapa sem que duas regiões adjacentes recebam a mesma cor. Este resultado foi provado computacionalmente em 1976. Foi um problema proposto em 1852 (Ver R. Wilson [25]).

Problema da coleta de lixo

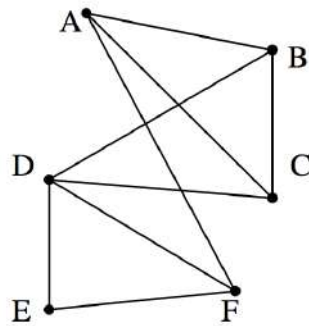
Uma prefeitura determinou um conjunto de rotas para a coleta de lixo da cidade. O problema é que as rotas pré-definidas possuem pontos de coleta em comum. Considere, por exemplo o conjunto de rotas a seguir:



O problema consiste em determinar como dividir o conjunto de 6 rotas em três dias da semana de tal forma que nenhum ponto de coleta é visitado mais que uma vez no mesmo dia. Representando o problema através de grafos, temos:

- Vértices: rotas
- Arestas: existe uma aresta entre duas rotas que possuam pontos de coleta em comum.

Para este conjunto de rotas temos o seguinte grafo:



A partição $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$ satisfaz as condições do problema. Existem outras? É possível fazer a coleta em dois dias da semana? O que muda na solução do problema se as rotas A e F se tornarem uma rota única?

Formalização

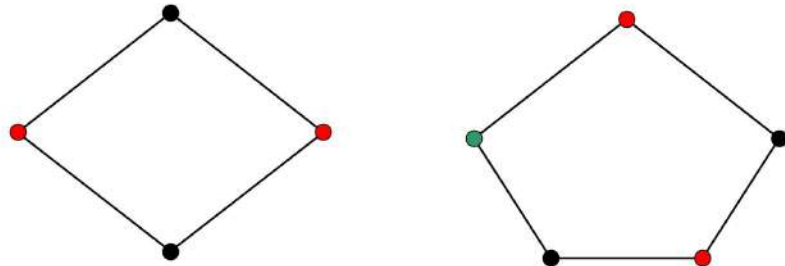
Para formalizar as ideias expostas acima considere as definições e resultados a seguir.

Definição 17.1 (Coloração). *Seja $G(V, A)$ um grafo e $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_m\}$ um conjunto de cores. Uma coloração de G é uma atribuição de cores aos vértices de G de tal forma que dois vértices adjacentes recebam cores diferentes. O **número cromático** de um grafo G é o menor número de cores necessário para obter uma coloração de G . Se o número cromático é $\chi(G)$, dizemos que o grafo é $\chi(G)$ -cromático.*

Como determinar o número cromático de um grafo? Não é uma tarefa muito fácil. Na verdade este é um problema de difícil resolução no caso de grafos quaisquer, no entanto, para alguns tipos de grafos é possível resolver o problema facilmente.

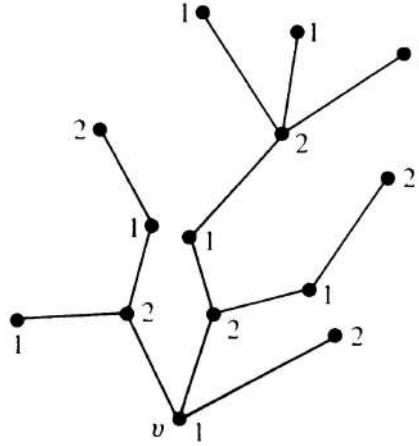
Exemplo 17.2. *Considere os seguintes casos:*

1. Grafo nulo: $\chi(G) = ?$;
2. Grafo completo: $\chi(K_n) = ?$;
3. Grafo circuito ($n \geq 3$): se n é par, G é 2-cromático; se n é ímpar, G é 3-cromático;



4. Uma árvore é 2-cromático.

De fato, escolha arbitrariamente um vértice v do grafo e atribua a cor 1. A partir deste vértice, todos os vértices que estiverem a uma distância ímpar atribua a cor 2 e os que estiverem a uma distância par atribua a cor 1. Como existe um e apenas um caminho entre cada par de vértices não teremos dois vértices adjacentes com a mesma cor.

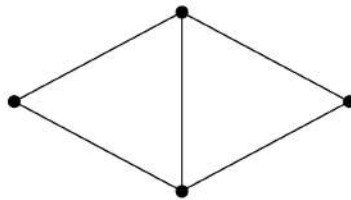


Teorema 17.3. *Um grafo é 2-cromático se e somente se for bipartido.*

Definição 17.4. *Um **clique** é um subgrafo completo de G . O tamanho de um clique é dado pelo seu número de vértices.*

Teorema 17.5. *O número cromático de um grafo é maior ou igual do que o tamanho do maior clique de G , ou seja, o número de vértices do maior clique do grafo, K_{max} , fornece um limite inferior para o número cromático de G .*

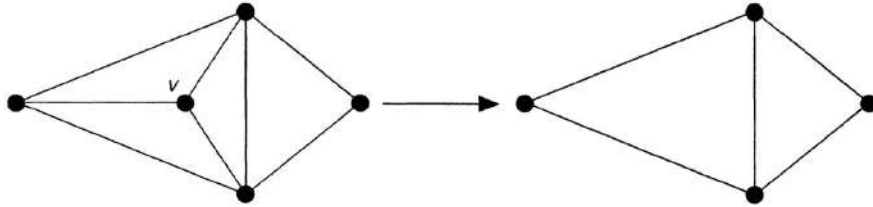
Exemplo 17.6. *O grafo a seguir contém um clique de tamanho 3. Qual é o seu número cromático?*



Teorema 17.7. *Seja G um grafo simples. Se Δ é grau máximo dos vértices de G , então o número cromático de G é menor ou igual a $\Delta+1$. Isto é, $K_{max} \leq \chi(G) \leq \Delta + 1$.*

Demonstração. Seja G um grafo simples com n vértices. A demonstração será feita por indução no número de vértices. É claro que o resultado vale para grafos com $n = 1$ e $n = 2$.

Suponha que o resultado vale para grafos com até $n - 1$ vértices. Seja v um vértice qualquer de G . Considere o grafo $H = G - v$. Então o grau máximo dos vértices de H , que possui $n - 1$ vértices, é no máximo Δ . Segue da hipótese de indução que $\chi(H) \leq \Delta + 1$, isto é, é possível colorir H com $\Delta + 1$ cores. Uma coloração de G é então obtida colorindo v com uma cor diferente das (no máximo) Δ cores usadas nos vértices adjacentes a v . \square



Observação 17.8. Observe que para mostrar que um grafo é $\chi(G)$ -cromático, é necessário mostrar que usar $\chi(G) - 1$ cores força dois vértices adjacentes a receberem a mesma cor.

Teorema 17.9 (Teorema de Brooks, 1941). *Seja G um grafo simples conexo, $G \neq K_n \forall n$. Se Δ é grau máximo dos vértices de G , então $K_{max} \leq \chi(G) \leq \Delta$.*

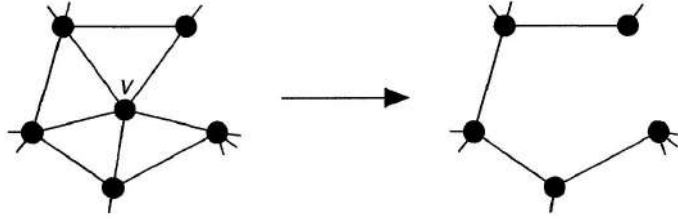
Demonstração. Ver R. Wilson [25]. \square

Observação 17.10. A aplicabilidade dos dois últimos resultados é limitada. Por exemplo, se $G = K_{1,n}$, então $\chi(G) = 2$ enquanto a estimativa dada pelo Teorema de Brooks é $\Delta = n$. Restringindo a atenção a grafos planares, temos resultados mais precisos.

Teorema 17.11. *Seja G um grafo simples e planar. Então $\chi(G) \leq 6$.*

Demonstração. Seja G um grafo simples planar com n vértices. A demonstração será feita por indução no número de vértices. É claro que o resultado vale para grafos com $n \leq 6$.

Suponha que o resultado vale para grafos com até $n - 1$ vértices. Segue da planaridade de G que existe $v \in V(G)$ com $d(v) \leq 5$. Considere o grafo $H = G - v$. Então H , que possui $n - 1$ vértices, é ainda planar. Segue da hipótese de indução que $\chi(H) \leq 6$, ou seja, é possível colorir H com 6 cores. Uma coloração de G é então obtida colorindo v com uma cor diferente das (no máximo) cinco cores usadas nos vértices adjacentes a v . \square

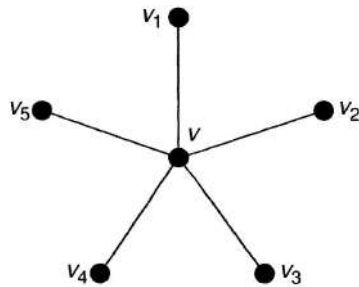


Teorema 17.12. *Seja G um grafo simples e planar. Então $\chi(G) \leq 5$.*

Demonstração. Seja G um grafo simples planar com n vértices. A demonstração será feita por indução no número de vértices. É claro que o resultado vale para grafos com $n \leq 5$.

Suponha que o resultado vale para grafos com até $n - 1$ vértices. Segue da planaridade de G que existe $v \in V(G)$ com $d(v) \leq 5$. Considere o grafo $H_1 = G - v$. Então H_1 , que possui $n - 1$ vértices, é ainda planar. Segue da hipótese de indução que $\chi(H_1) \leq 5$, ou seja, é possível colorir H_1 com 5 cores. Se $d(v) < 5$, uma coloração de G é então obtida colorindo v com uma cor diferente das (no máximo) quatro cores usadas nos vértices adjacentes a v .

Suponha que $d(v) = 5$ e sejam v_1, \dots, v_5 os vértices adjacentes a v . Suponha, s.p.g., que estes vértices estejam arranjados em torno de v em sentido horário, como na figura abaixo.



Temos que v_1, \dots, v_5 não são todos adjacentes entre si, caso contrário, K_5 seria um subgrafo de G , o que contradiz a planaridade de G . Então há ao menos um par de vértices não-adjacentes, digamos, v_1 e v_3 .

Vamos agora contrair os vértices v_1 e v e, em seguida, o vértice resultante e v_3 , obtendo um vértice u . O grafo obtido H_2 é ainda planar e possui menos que n vértices. Segue da hipótese de indução que é possível colorir H_2 com cinco cores. Uma coloração de G é obtida

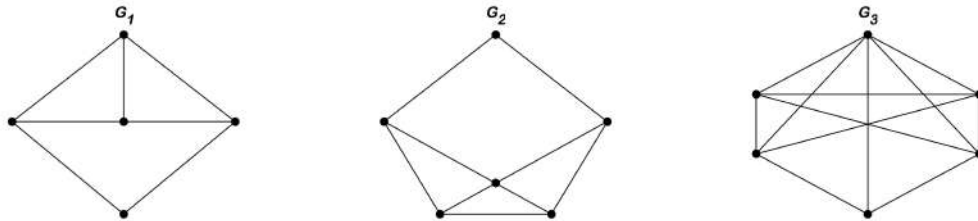
colorindo v_1 e v_3 com a cor usada para colorir u , e colorindo v com uma cor diferente das (no máximo) quatro cores usadas para colorir v_2, v_4, v_5, u . \square

É natural perguntar se é possível melhorar ainda mais. Isso leva a um dos mais famosos problemas em aberto (até 1976) da matemática: o problema das quatro cores. O problema foi posto em 1852 em uma formulação alternativa. Appel e Haken apresentaram uma prova em 1976. Tal prova levou anos para ser finalizada e consumiu muito tempo computacional.

Teorema 17.13. *Seja G um grafo simples e planar. Então $\chi(G) \leq 4$.*

Exercício. Encontre o número cromático dos grafos a seguir.

a)

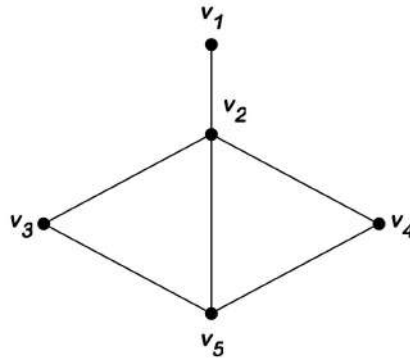


b) K_7 ;

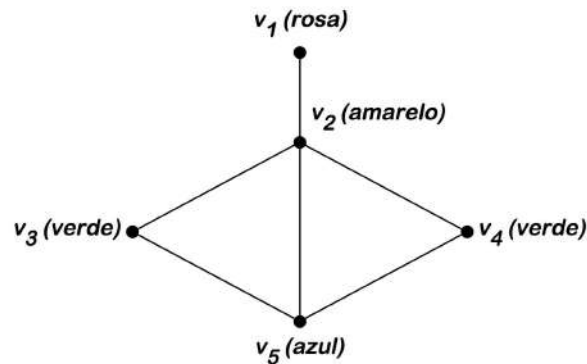
c) $K_{3,5}$.

17.1 Partição Cromática

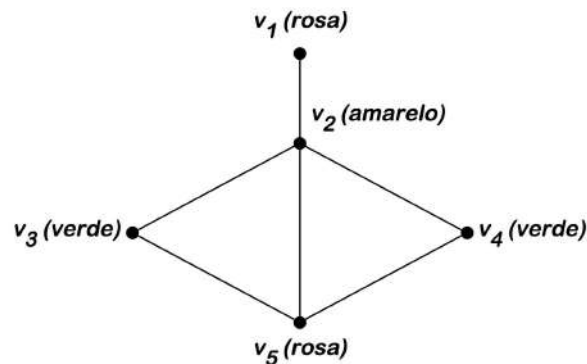
Seja o grafo G_1 :



Uma coloração deste grafo pode ser:



Esta coloração particiona o conjunto de vértices do grafo em: a) $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5\}$. Mas vimos ainda que o número cromático deste grafo é 3, e uma coloração pode ser:



E a partição associada é: b) $\{v_1, v_5\}, \{v_2\}, \{v_3, v_4\}$. Observe que estes conjuntos de vértices tem em comum o fato que os vértices de um mesmo conjunto não são adjacentes.

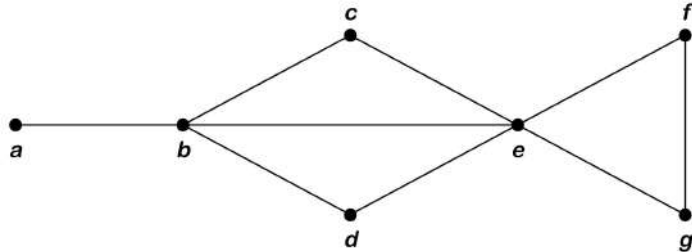
Definição 17.14 (Conjunto Independente). *Um subconjunto de vértices de um grafo é chamado de **conjunto independente** de vértices se não existem dois vértices adjacentes neste conjunto. O número de independência $\alpha(G)$ é a cardinalidade do subconjunto independente máximo de vértices do grafo. Um conjunto independente de vértices é **maximal** se nenhum vértice pode ser adicionado ao conjunto.*

Exemplo 17.15. *Em relação a G_1 :*

- Conjuntos independentes: $\{v_1, v_5\}, \{v_1\}$;
- Conjunto independente de vértices maximal: $\{v_1, v_5\}$.

Aplicação 1:

Suponha que o grafo G_2



descreve o seguinte problema. Cada um dos sete vértices é uma palavra código a ser usada em algum tipo de comunicação. Algumas dessas palavras são parecidas com outras (por exemplo, em relação ao som) e podem ser confundidas. Tais pares de palavras são ligadas por arestas. Encontre o maior conjunto possível de palavras código que podem ser usadas para se obter uma comunicação segura.

$\{a, c, d, f\}$ é uma solução: conjunto independente de vértices maximal.

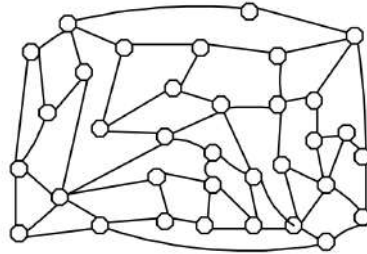
Este grafo possui 5 conjuntos independentes de vértices maximais: $\{a, c, d, f\}, \{a, c, d, g\}, \{b, g\}, \{b, f\}, \{a, e\}$.

Qual é o número cromático do grafo? É o menor número de conjuntos independentes cuja união contém todos os vértices do grafo. Por exemplo: $\{a, c, d, f\}, \{b, g\}, \{a, e\}$. Assim o problema de determinar uma coloração mínima de G pode ser formulado em termos de particionar $V(G)$ em um número mínimo de conjuntos independentes.

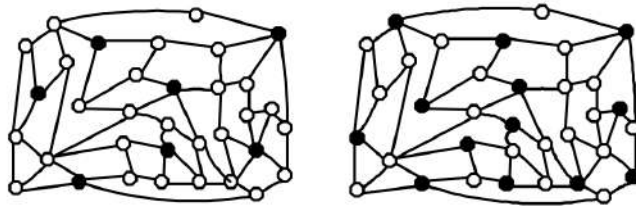
Aplicação 2: [S. Jurkiewicz, Grafos – Uma Introdução]

Suponhamos que num parque, representado pelo grafo abaixo, devam ser instaladas barracas para venda de sorvete. A operadora das barracas faz as seguintes restrições:

- Uma barraca deve ser localizada em uma esquina (vértice);
- Esquinas próximas (vértices adjacentes) só admitem uma barraca.

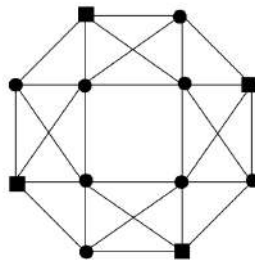


Estamos procurando então um conjunto independente. Para instalar o máximo de barracas, procuramos um conjunto independente máximo. Na figura abaixo, a configuração da esquerda mostra um conjunto independente maximal, isto é, não podemos acrescentar mais barracas de sorvete. Mas a configuração da direita também é independente e contém quase o dobro de barracas.



Aplicação 3: [S. Jurkiewicz, Grafos – Uma Introdução]

Suponhamos que um grafo represente a incompatibilidade de horários entre professores que devem dar prova final. Os vértices x e y estarão ligados se representarem professores que têm alunos em comum para ministrar a prova. Qual o maior número de professores que podem dar prova ao mesmo tempo? A resposta é dada pelo subconjunto independente máximo de vértices do grafo. O subconjunto assinalado com quadrados negros no grafo da figura abaixo mostra um conjunto com estas características. No nosso exemplo, $\alpha(G) = 4$.



Definição 17.16 (Partição Cromática). *Dado um grafo simples conexo, uma partição do conjunto de vértices no menor número possível de conjuntos independentes de vértices é chamada de partição cromática.*

Exemplo 17.17. *Para o grafo G_2 , abaixo temos 4 exemplos de partições cromáticas:*

$\{a, c, d, f\}, \{b, g\}, \{e\};$
 $\{a, c, d, g\}, \{b, f\}, \{e\};$
 $\{c, d, f\}, \{b, g\}, \{a, e\};$
 $\{c, d, g\}, \{b, f\}, \{a, e\}.$

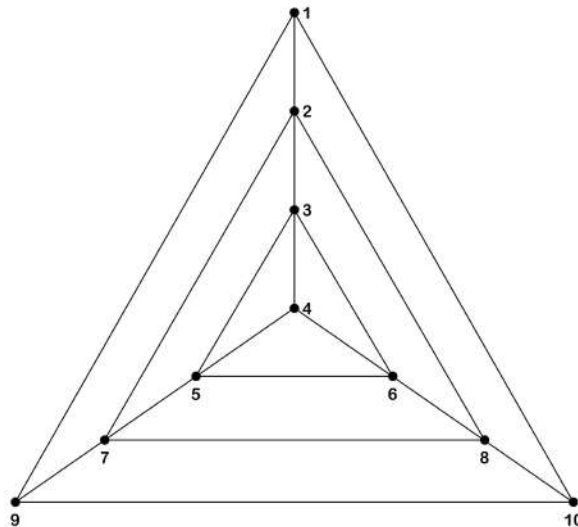
Algoritmo Guloso de Coloração

Como encontrar uma partição cromática de um grafo? Vamos ver a seguir um algoritmo guloso (ou míope) baseado na ideia de construção de conjuntos independentes.

1. Dado: um grafo $G(V, A)$.
2. Início.
3. Ordene o conjunto de vértices em ordem não-crescente de graus:
 v_1, v_2, \dots, v_n .
4. Faça $S_1 = S_2 = \dots = S_n = \emptyset$.
5. Inclua v_1 em S_1 .
6. Para $j = 2, \dots, n$ faça:
 - (a) Encontre o conjunto S_r tal que o vértice v_j não seja adjacente a nenhum vértice já incluído a ele e $r = \min\{i : i = 1, \dots, n\}$;
 - (b) Inclua o vértice v_j em S_r .
7. Fim.

Note que ao fim do algoritmo teremos obtido no máximo n conjuntos independentes de vértices.

Exemplo 17.18. *Vamos usar esta ideia para obter uma partição cromática do grafo G_3 a seguir.*



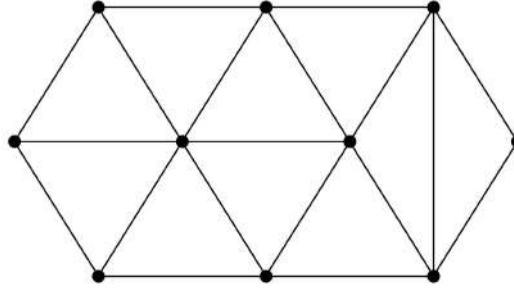
Ordenação dos vértices: $\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 1, 4, 9, 10\}$.

Partição obtida: $S_1 = \{2, 5, 9\}$; $S_2 = \{3, 7, 1\}$; $S_3 = \{6, 10\}$; $S_4 = \{8, 4\}$.

Outra partição que pode ser obtida: $S_1 = \{2, 4, 9\}$; $S_2 = \{1, 3, 7\}$; $S_3 = \{6, 10\}$; $S_4 = \{5, 8\}$.

Aplicação 4:

O senado possui várias comissões que se reúnem durante uma hora por semana. Deseja-se fazer um calendário de reuniões que minimiza o número total de horas de reuniões e tal que duas comissões que possuam membros em comum não se reúnam no mesmo horário. Supondo que existem 10 comissões, mostre que este problema pode ser resolvido como um problema de coloração. Se as comissões não possuísem membros em comum elas poderiam se reunir simultaneamente. Como resolver então? A informação chave é o fato de que um mesmo membro pertencem a mais de uma comissão. Para representar o problema através de um grafo, precisamos definir os vértices e as arestas. Sejam as comissões os vértices. E as arestas vão ligar comissões que possuem membros em comum. Vamos supor que o grafo abaixo representa uma situação particular:

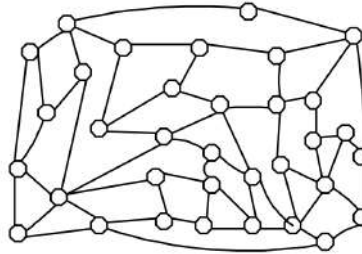


Para definir um calendário de reuniões basta encontrar o número cromático deste grafo e uma coloração associada.

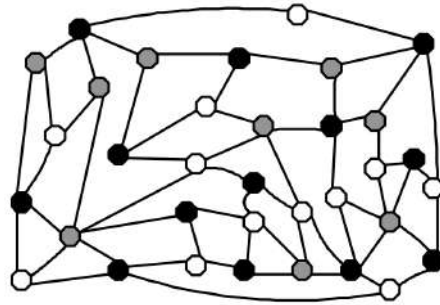
Aplicação 2 (Revisitada): [S. Jurkiewicz]

Voltando ao problema do parque, suponha que quiséssemos instalar barracas de sorvete, pipocas, cachorro-quente etc. As restrições agora serão:

- Uma barraca deve ser localizada em uma esquina (vértice);
- Esquinas próximas (vértices adjacentes) só admitem barracas com serviços diferentes.



Por motivos comerciais, queremos evitar a diversificação excessiva de serviços. Qual seria o menor número de serviços que poderíamos usar? Vemos na figura abaixo que podemos colorir os vértices com apenas 3 cores (este número é mínimo pois o grafo inclui um subgrafo isomorfo a K_3).

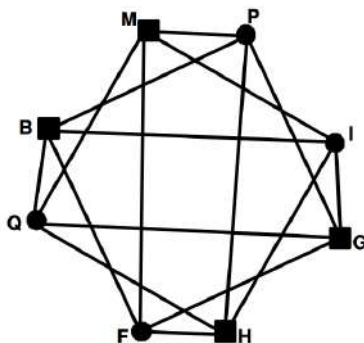
**Aplicação 3 (Revisitada):** [S. Jurkiewicz]

Uma outra aplicação clássica de coloração é o problema dos exames. A tabela abaixo mostra a alocação de alunos nos exames finais que eles devem prestar:

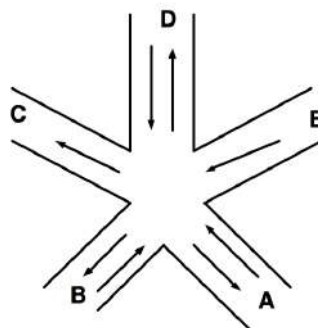
Alunos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Matemática	X							X				X			X	
Português	X			X							X					X
Inglês						X	X	X							X	
Geografia				X	X	X			X				X			
História			X				X				X			X		
Física		X							X			X	X	X		
Química			X		X					X					X	
Biologia		X						X		X						X

Duas disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não houver alunos comuns. Vamos construir um grafo com os vértices $\{M, P, I, G, H, F, Q, B\}$; dois vértices estarão ligados se tiverem um aluno em comum. A figura abaixo mostra uma partição dos vértices em dois conjuntos independentes disjuntos. Os exames podem ser realizados em 2 horários:

- um para $\{B, G, H, M\}$
- e outro para $\{F, I, P, Q\}$.

**Aplicação 5:** [S. Jurkiewicz]

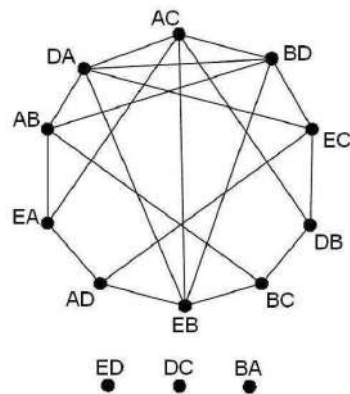
Uma outra aplicação é a determinação de períodos de um sinal de trânsito. O desenho abaixo representa um cruzamento. As direções permitidas estão assinaladas por setas.



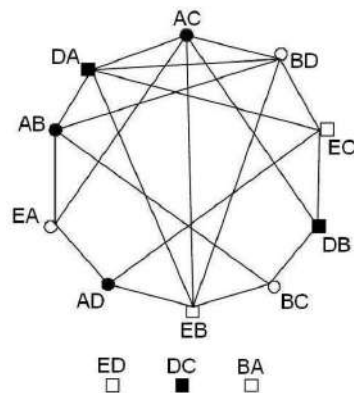
Como organizar o trânsito? Vamos formar um grafo de incompatibilidade. Os vértices serão as direções possíveis:

$$V = \{AB, AC, AD, BA, BC, BD, DA, DB, DC, EA, EB, EC, ED\}.$$

Ligamos dois vértices sempre que as direções forem incompatíveis (por exemplo AD e EB).



Observe que BA , DC e ED são compatíveis com todas as direções, sendo por isso vértices isolados. Uma coloração dos vértices corresponde a uma divisão em períodos. Como os vértices AC , BD , DA e EB formam um K_4 , precisamos de pelo menos 4 cores.



Temos que, de fato, $\chi(G) = 4$:
 $\{AB, AC, AD\}$, $\{BC, BD, EA\}$, $\{BA, EB, EC, ED\}$, $\{DA, DB, DC\}$.

Exercícios.

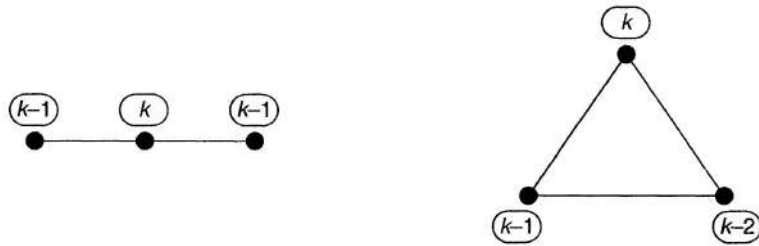
1. Modele o problema de encontrar o número cromático de G utilizando variáveis 0/1.
2. Encontre um grafo tal que o número cromático seja 2 mas que a coloração obtida através do algoritmo guloso descrito acima é maior ou igual a 3.

3. Qual é o número cromático do mapa do Brasil? (Ver em: A. Rabelo, M. Moreira e S. Rangel, O número cromático do Brasil, Anais do CNMAC 2010, SBMAC.
Disponível em http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes/socorro/cnmac_brasil_cromatico_691.pdf
(última visita 20/01/2017).

17.2 Polinômios Cromáticos

Definição 17.19. *Sejam G um grafo simples e $P_G(k)$ o número de maneiras de colorir os vértices de G com k cores (de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas). $P_G(k)$ é chamada (por enquanto) **função cromática** de G .*

Exemplo 17.20. *Nos grafos abaixo temos $P_G(k) = k(k-1)^2$ para o grafo à esquerda e $P_G(k) = k(k-1)(k-2)$ para o grafo à direita.*



Exercícios.

1. Mostre que $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ se G é uma árvore com n vértices.
2. Mostre que $P_G(k) = k(k-1) \cdots (k-n+1)$ se G é um grafo completo com n vértices.
3. Grafos não isomorfos podem possuir uma mesma função cromática?

Observação 17.21. 1. $k < \chi(G) \Rightarrow P_G(k) = 0$;

2. $k \geq \chi(G) \Rightarrow P_G(k) > 0$;

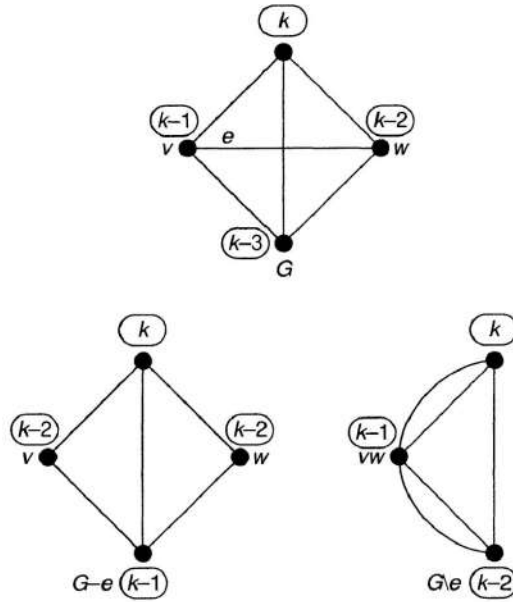
3. $\chi(G) = \min\{k : P_G(k) > 0\}$;

4. G grafo simples planar $\Rightarrow P_G(4) > 0$.

Teorema 17.22. *Sejam G um grafo simples e $a \in A(G)$ uma aresta de G . Então,*

$$P_G(k) = P_{G-a}(k) - P_{G \setminus a}(k),$$

onde $G - a$ é o grafo obtido de G após a remoção da aresta a e $G \setminus a$ é o grafo obtido após a contração de a .



Demonstração. Vamos denotar $a = (v, w)$, $v, w \in V(G)$. Consideremos as colorações de $G - a$ com k cores em que os vértices v e w recebam cores diferentes. Notemos que o número de maneiras de se fazer tais colorações coincide com $P_G(k)$. Agora, consideremos as colorações de $G - a$ com k cores em que v e w recebam cores iguais. Observemos que o número de maneiras de se fazer tais colorações é igual a $P_{G \setminus a}(k)$. Portanto, $P_{G-a}(k) = P_G(k) + P_{G \setminus a}(k)$, ou seja,

$$P_G(k) = P_{G-a}(k) - P_{G \setminus a}(k).$$

□

Corolário 17.23. *A função cromática de um grafo simples é polinomial.*

Demonstração. Vamos rotular as arestas do grafo simples G como a_1, a_2, \dots, a_m . Temos, do teorema anterior, que

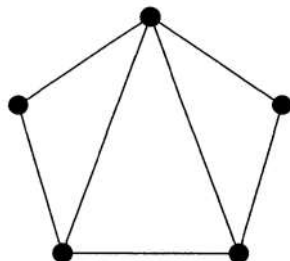
$$\begin{aligned} P_G(k) &= P_{G-a_1}(k) - P_{G \setminus a_1}(k) \\ &= [P_{(G-a_1)-a_2}(k) - P_{(G-a_1) \setminus a_2}(k)] \\ &\quad - [P_{(G \setminus a_1)-a_2}(k) - P_{(G \setminus a_1) \setminus a_2}(k)] \\ &\quad \vdots \\ &= P_{(G-a_1-\dots-a_{m-1})-a_m}(k) - \dots - P_{(G \setminus a_1 \setminus \dots \setminus a_{m-1}) \setminus a_m}(k). \end{aligned}$$

Notemos que $(G-a_1-\dots-a_{m-1})-a_m$, $(G \setminus a_1 \setminus \dots \setminus a_{m-1}) \setminus a_m$ e todos os grafos obtidos ao final do processo são grafos nulos. Além disso, a função cromática de um grafo nulo com r vértices é, claramente, igual a k^r . Portanto, a função cromática de G é uma soma de termos do tipo k^r , ou seja, é uma função polinomial. \square

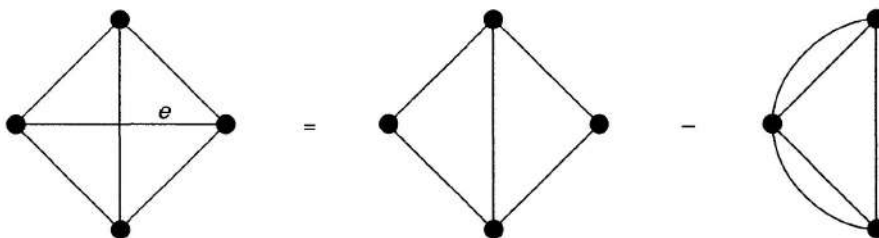
Observação 17.24. 1. Passaremos a chamar $P_G(k)$ de **polinômio cromático**.

2. Podemos ver, a partir dos resultados anteriores, que $P_G(k)$ possui grau n quando G for um grafo simples com n vértices.
3. No processo de redução obtém-se apenas um grafo nulo com n vértices: $G - a_1 - \dots - a_m$, de modo que o coeficiente de k^n é sempre igual a um.
4. É possível mostrar que os coeficientes em $P_G(k)$ alternam em sinal e que o coeficiente de k^{n-1} é sempre igual a $-m$, onde m é o número de arestas do grafo.
5. Vale também que o termo independente de $P_G(k)$ é sempre nulo, uma vez que não é possível colorir um grafo com zero cores.
6. Na prática, não é necessário levar o processo de redução a cabo até se obter apenas grafos nulos. Basta reduzir até que se obtenha grafos para os quais o polinômio cromático seja conhecido, como, por exemplo, árvores e grafos completos.

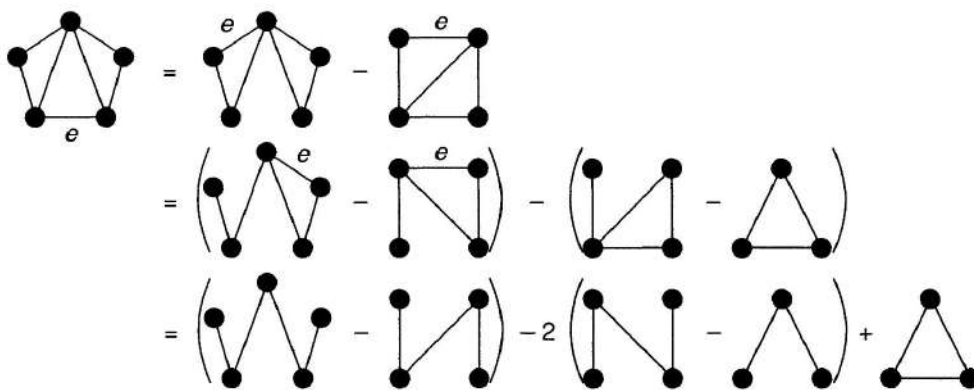
Exemplo 17.25. Vamos aplicar o processo de redução ao grafo abaixo para obter o seu polinômio cromático. Podemos adiantar, a partir das últimas observações, que $P_G(k) = k^5 - 7k^4 + ak^3 - bk^2 + ck$, onde a, b, c são constantes positivas.



Na prática é melhor ir desenhando os grafos obtidos no processo de redução em vez de ir escrevendo os respectivos polinômios cromáticos. Por exemplo, se G é o grafo do exemplo anterior, não escrevemos $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k)$; é mais produtivo escrever a “equação” como



Tendo isto em mente, obtemos (vamos ignorar arestas paralelas que eventualmente surjam)



Logo,

$$\begin{aligned}
 P_G(k) &= k(k-1)^4 - 3k(k-1)^3 + 2k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2) \\
 &= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k.
 \end{aligned}$$

De $P_G(k) = k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k$, temos

- $P_G(0) = 0$;
- $P_G(1) = 1 - 7 + 18 - 20 + 8 = 0$;
- $P_G(2) = 32 - 112 + 144 - 80 + 16 = 0$;
- $P_G(3) = 243 - 567 + 486 - 180 + 24 = 6 > 0$.

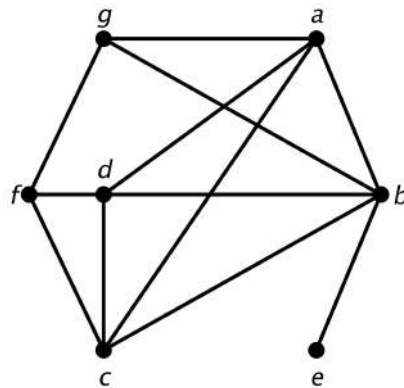
Logo, $\chi(G) = 3$.

Aplicação:

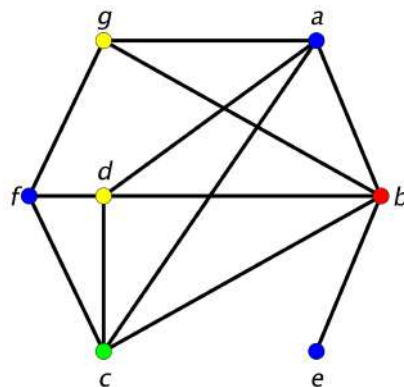
Um calendário de palestras deve ser elaborado. Como alguns estudantes desejam assistir várias delas, certas palestras não podem coincidir. Os asteriscos na tabela a seguir mostram quais pares de palestras não podem coincidir. Quantos períodos são necessários para programar todas as sete palestras?

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	-	*	*	*	-	-	*
<i>b</i>	*	-	*	*	*	-	*
<i>c</i>	*	*	-	*	-	*	-
<i>d</i>	*	*	*	-	-	*	-
<i>e</i>	-	*	-	-	-	-	-
<i>f</i>	-	-	*	*	-	-	*
<i>g</i>	*	*	-	-	-	*	-

Vamos construir um grafo cujos vértices representam as palestras. Vértices adjacentes representam palestras que não podem ocorrer ao mesmo tempo.



- Uma coloração dos vértices deste grafo corresponde a uma programação das palestras.
 - O número cromático do grafo nos dá o número de períodos necessários.
 - O polinômio cromático nos dá a quantidade de maneiras de se fazer a programação.
- **Exercício:** Encontrar o polinômio cromático.

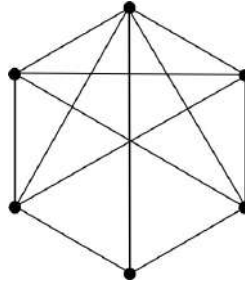


Exercícios.

Lista baseada na referência

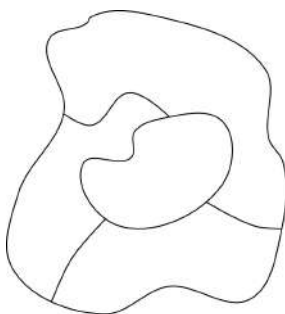
R.J. Wilson and J.J. Watkins, *Graphs – An Introductory approach*, J. Wiley, 1990 (vide ref. [26]).

1. Classifique cada uma das afirmações abaixo como verdadeira ou falsa. Explique.
 - (a) Se G contém como subgrafo o grafo completo K_r , então o número cromático de G é maior ou igual a r .
 - (b) Se o número cromático de G é maior ou igual a r , então G contém como subgrafo o grafo completo K_r .
2. Considere o seguinte grafo:



- (a) Encontre um limite superior e um limite inferior para o número cromático deste grafo;
 - (b) Encontre uma partição cromática para este grafo.
3. Construa um grafo tal que a coloração ótima não é obtida pelo algoritmo guloso que analisa os vértices em ordem não-crescente de grau (isto é, $d(v_i) \geq d(v_{i+1})$, $i = 1, \dots, n$).
4. Construa um grafo que possua conectividade de vértices 2, conectividade de arestas 3, número cromático 3, e que seja regular de grau 3.
5. O Departamento de matemática aplicada está preparando o horário das disciplinas para o próximo ano. Existem um total de n disciplinas para serem distribuídas em m horários durante a semana. Alguns pares de disciplinas não podem ser oferecidos no mesmo horário porque alguns alunos precisam cursá-los simultaneamente. Modele este problema como um problema de coloração em grafos, determine o significado dos vértices, das arestas e das cores. Sob quais condições não é possível encontrar um horário factível?

6. Para colorir o mapa abaixo de forma que duas regiões com fronteira em comum (regiões adjacentes) recebam cores diferentes, são necessárias 4 cores. Isto porque cada região é adjacente a todas as outras regiões. Sem usar o Teorema das 4-cores, mostre que nenhum mapa no plano pode possuir 5 regiões mutuamente adjacentes. Este fato não prova o teorema das 4 cores, por que?



7. O senado possui várias comissões que se reúnem durante uma hora por semana. Deseja-se fazer um calendário de reuniões que minimize o número total de horas de reuniões e tal que duas comissões que possuam membros em comum não se reúnam no mesmo horário. Supondo que existam dez comissões, e que as comissões com membros em comum estão representadas na tabela abaixo, mostre que este problema pode ser resolvido como um problema de coloração em grafos.

Comissão	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>
<i>A</i>		*	*	*						
<i>B</i>	*		*		*					
<i>C</i>	*	*		*	*	*	*			
<i>D</i>	*		*			*				
<i>E</i>		*	*			*		*		
<i>F</i>			*	*	*		*	*		*
<i>G</i>			*			*				*
<i>H</i>					*	*			*	*
<i>I</i>								*		*
<i>J</i>						*	*	*	*	

8. Um clube precisa organizar alguns passeios ao zoológico para nove crianças: Andrew, Bill, Catherine, Deirdre, Edward, Fiona, Gina,

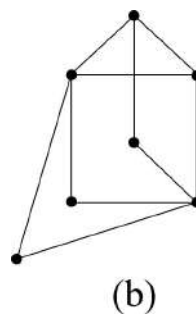
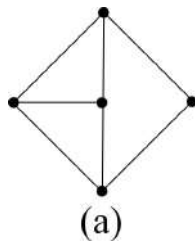
Harry e Iris. Catherine se recusa a participar dos passeios com qualquer um dos garotos, Andrew não participará se qualquer uma das garotas (exceto Deirdre) também participar, Edward e Harry não devem ir juntos pois fariam muita bagunça, Fiona não pode ficar com Bill ou Gina, e Bill e Edward não gostam de Iris. Exprese todas estas informações através de um grafo, e use este grafo para encontrar o número mínimo de passeios necessários.

9. Uma indústria química precisa armazenar algumas substâncias químicas em um depósito. Algumas substâncias reagem violentamente quando em contato, e o gerente da indústria decide dividir o depósito em várias salas de modo a manter separados um par de substâncias perigosas. Na seguinte tabela, estão indicados tais pares:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<i>A</i>	-	*	*	*			*
<i>B</i>	*	-	*	*	*		*
<i>C</i>	*	*	-	*		*	
<i>D</i>	*	*	*	-		*	
<i>E</i>		*			-		
<i>F</i>			*	*		-	*
<i>G</i>	*	*				*	-

Construa um grafo apropriado e considere este como um problema de decomposição de vértices. Encontre o menor número de salas necessárias para o armazenamento as substâncias químicas com segurança.

10. Encontre o número cromático dos grafos abaixo:



11. Encontre os polinômios cromáticos de K_6 e de $K_{1,5}$.

De quantas maneiras estes grafos podem ser coloridos com sete cores?

12. Encontre os polinômios cromáticos dos seis grafos simples conexos com quatro vértices.

Verifique que cada polinômio é da forma $k^4 - mk^3 + ak^2 - bk$, onde m é o número de arestas e a e b são constantes positivas.

13. Encontre os polinômios cromáticos de $K_{2,5}$ e de C_5 .

14. Prove que os polinômios cromáticos de $K_{2,s}$ e de C_n são $k(k-1)^s + k(k-1)(k-2)^s$ e $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

15. Prove que se G é um grafo simples desconexo, então seu polinômio cromático $P_G(k)$ é o produto dos polinômios cromáticos de seus componentes. O que pode ser dito sobre o grau do termo não-nulo de menor grau?

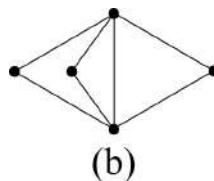
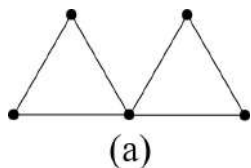
16. Seja G um grafo simples com n vértices e m arestas. Use indução em m e o teorema anterior para provar que o coeficiente de k^{n-1} em $P_G(k)$ é $-m$ e que os coeficientes alternam em sinal.

17. Use os resultados nos dois últimos exercícios para mostrar que se $P_G(k) = k(k-1)^n$, então G é uma árvore com n vértices.

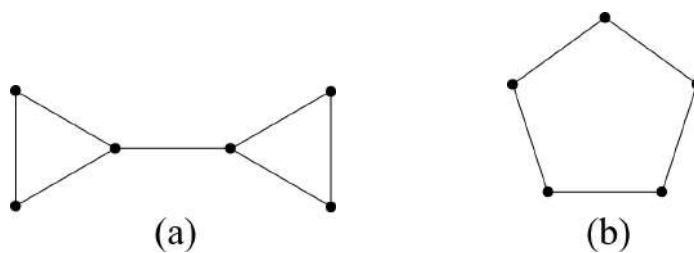
18. Encontre três grafos cujos polinômios cromáticos são $k^5 - k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k$.

19. Escreva os polinômios cromáticos do grafo completo K_5 e do grafo completo bipartido $K_{1,4}$.

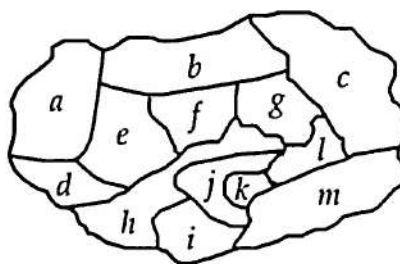
20. Encontre o polinômio cromático dos seguintes grafos:



21. Use o processo de eliminação-contração de arestas para encontrar o polinômio cromático de cada um dos seguintes grafos:



22. Considere o seguinte mapa:



- (a) Encontre uma coloração deste mapa com quatro cores;
- (b) Desenhe o grafo correspondente, e mostre como a coloração obtida na parte (a) gera uma decomposição de vértices deste grafo na qual nenhum par de vértices no mesmo subconjunto são adjacentes.

Capítulo 18

Coloração de Arestas

18.1 Cobertura de Arestas

Definição 18.1. Dado um grafo $G(V, A)$, um conjunto g de arestas é uma **cobertura** de G se todo vértice de G é extremo de pelo menos uma aresta de g .

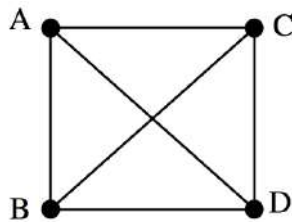
Exemplo 18.2. • G é sua própria cobertura;

• Uma árvore geradora é uma cobertura de G ;

• Um circuito hamiltoniano (caso exista) é uma cobertura de G .

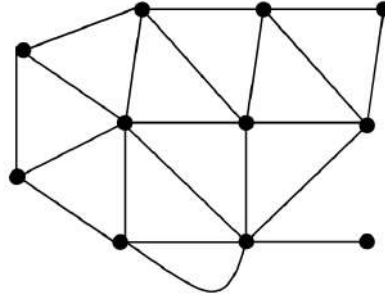
Definição 18.3. Dado um grafo $G(V, A)$, uma cobertura g de G é dita **minimal** se a remoção de qualquer aresta de g deixa vértices descobertos.

Exemplo 18.4. O conjunto $g = \{(A, C), (B, D)\}$ é uma cobertura minimal do grafo dado na figura abaixo.

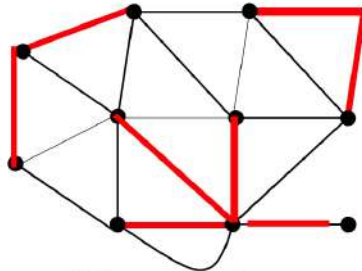


Aplicação

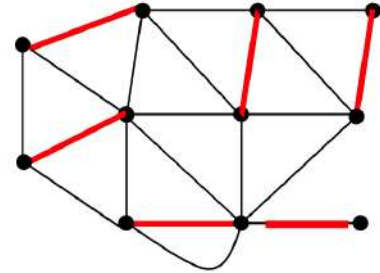
Suponha que o grafo da figura a seguir represente um mapa das ruas de um bairro de uma cidade. Cada um dos vértices representa um ponto de perigo potencial e deve estar sob constante vigilância de um carro patrulha. Como você designaria o menor número de carros patrulha para manter todos os vértices cobertos?



Queremos a cobertura minimal com o menor número possível de arestas. No caso 6 carros patrulhas (6 arestas) são suficientes para cobrir todos pontos de perigo potencial (os vértices).



Cobertura com 8 arestas



Cobertura com 6 arestas

Observação 18.5. 1. Qual é condição mínima que um grafo deve satisfazer para que exista uma cobertura? Não possuir vértices isolados.

2. Qual é o número mínimo de arestas em uma cobertura de um grafo com n vértices? $\lceil n/2 \rceil$.

3. Uma cobertura mínima pode conter um circuito? Não.

4. Qual é o número máximo de arestas em uma cobertura mínima? $n - 1$.

Teorema 18.6. *Uma cobertura g de um grafo é minimal se, e somente se, g não possui caminhos de comprimento maior ou igual a 3.*

Demonstração. (\Rightarrow) Por contradição suponha que uma cobertura g tenha um caminho de comprimento 3, digamos $\{v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, (v_3, v_4), v_4\}$. A aresta (v_2, v_3) pode ser retirada sem que os vértices v_2 e v_3 fiquem descobertos. Portanto g não é uma cobertura minimal.

(\Leftarrow) Se a cobertura g não possui caminhos de comprimento 3, todos os seus componentes são grafos estrela (isto é, grafos $K_{1,q}$ que tem formato de estrela). Nenhuma aresta de um grafo estrela pode ser removida sem deixar um vértice descoberto. Portanto g é uma cobertura minimal. \square

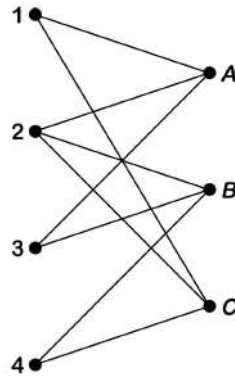


Exercício. Modele, utilizando variáveis 0 ou 1, o problema de encontrar um conjunto cobertura para G com o menor número possível de arestas.

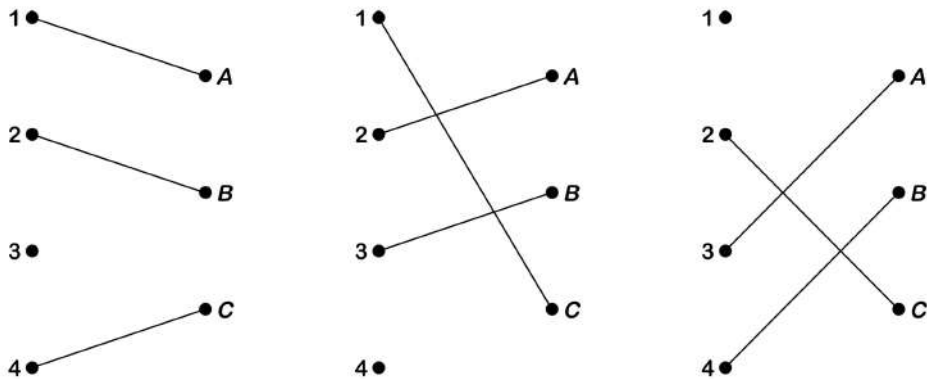
18.2 Coloração de Arestas

Motivação

Ao final do ano acadêmico, cada estudante deve fazer um exame oral com seus professores. Suponha que existam 4 estudantes e três professores, e que os exames que cada aluno deve fazer esteja definido de acordo com o seguinte grafo bipartido:



Os vértices representam os alunos e professores e a aresta (i, j) representa se o aluno i ($i = 1, 2, 3, 4$) deve ser examinado pelo professor j ($j = A, B, C$). Se duas arestas são adjacentes, então os exames associados não podem ser feitos simultaneamente. A questão é determinar o número de períodos necessários para que os exames ocorram. A resposta para este problema envolve uma partição do conjunto de arestas de tal forma que arestas adjacentes não pertençam a um mesmo conjunto. Uma possível solução para este problema é:



Se atribuirmos uma cor diferente para as arestas de cada um destes conjuntos, obteremos uma coloração das arestas do grafo.

Definição 18.7. *Seja $G(V, A)$ um grafo e $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ um conjunto de cores. Uma **coloração das arestas** de G é uma atribuição de alguma cor do conjunto C para cada aresta em A de tal modo que a duas arestas adjacentes sejam atribuídas cores diferentes.*

O número mínimo de cores necessárias para se obter uma coloração das arestas de G , denotado por $\chi'(G)$, é chamado de **índice cromático** de G .

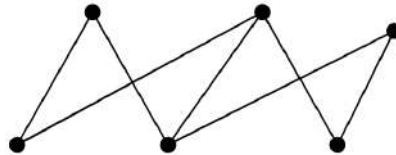
Observação 18.8. Lembre-se que número cromático ($\chi(G)$) se refere a coloração dos vértices de G .

Teorema 18.9 (Teorema de Vizing). *Seja $G(V, A)$ um grafo simples. Então o índice cromático de G satisfaz $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$, onde $\Delta = \max\{d(v) : v \in V\}$.*

Demonstração. O limite inferior é óbvio. A prova do limite superior é algo envolvida e vamos omitir. Uma prova completa pode ser encontrada, por exemplo, em Bondy e Murty [5]. \square

Exercício. Qual o índice cromático dos seguintes grafos:

1. circuito com 3 vértices?
2. circuito com 4 vértices?
3. grafo completo com 4 vértices?
4. grafo completo com 5 vértices?
5. do grafo abaixo?



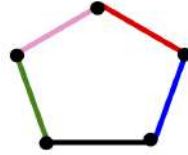
Questão.

Como obter uma coloração das arestas de um grafo completo?

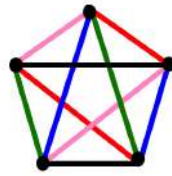
Teorema 18.10. *Tem-se que $\chi'(K_n) = n - 1$ para n par e $\chi'(K_n) = n$ para n ímpar.*

Demonstração. Ver Wilson e Watkins [26]. \square

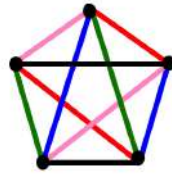
Vamos ilustrar o procedimento para $n = 5$ e $n = 6$. Primeiro o caso ímpar $n = 5$, em que $\chi'(K_5) = 5$ cores. Desenhe o grafo na forma de um polígono regular. Use uma cor diferente para cada uma das arestas da borda.



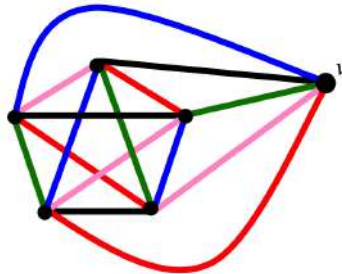
As arestas restantes recebem a mesma cor que as arestas da borda paralelas a elas conforme a figura abaixo.



Considere agora o caso par $n = 6$, em que $\chi'(K_6) = 5$ cores. Remova um vértice v de G e use o procedimento anterior para colorir as arestas do grafo resultante G' (que possui um número ímpar de vértices). Observe a coloração das arestas de G' . Note que em cada vértice existe exatamente uma das $n - 1$ cores faltando e que as cores que faltam são todas diferentes.



Acrescente o vértice v retirado anteriormente, e use as cores que faltam para colorir as arestas incidentes em v .



Teorema 18.11 (Vizing – Versão estendida). *Seja $G(V, A)$ um grafo. Então o índice cromático de G satisfaz $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + h$, onde*

$\Delta = \max\{d(v) : v \in V\}$ e h é o número máximo de arestas unindo um par de vértices.

Demonstração. Ver Wilson e Watkins [26]. □

Teorema 18.12 (Shannon). *Sejam $G(V, A)$ um grafo e $\Delta = \max\{d(v) : v \in V\}$. Então o índice cromático de G satisfaz*

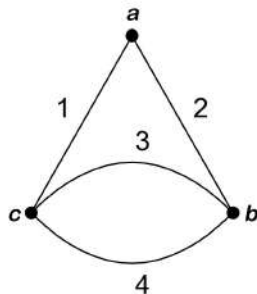
$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \frac{3\Delta}{2}, \text{ se } \Delta \text{ é par,}$$

e

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \frac{3\Delta - 1}{2}, \text{ se } \Delta \text{ é ímpar.}$$

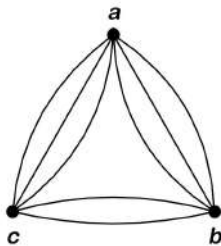
Demonstração. Ver Wilson e Watkins [26]. □

Exemplo 18.13. *Considere o grafo G abaixo:*



- Teorema de Vizing: $3 \leq \chi'(G) \leq 5$;
- Teorema de Shannon: $3 \leq \chi'(G) \leq 4$;
- Temos que $\chi'(G) = 4$.

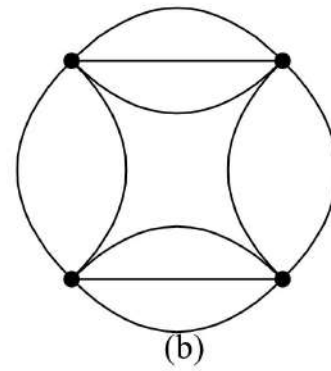
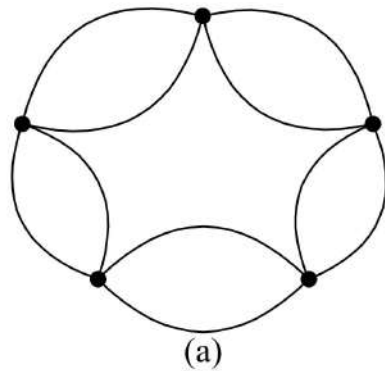
Exemplo 18.14. *Considere o grafo G abaixo:*



- Teorema de Vizing: $6 \leq \chi'(G) \leq 9$;
- Teorema de Shannon: $6 \leq \chi'(G) \leq 9$;
- Temos que $\chi'(G) = 8$.

Exercício. [J.M. Aldous & R. Wilson [2]] Para cada um dos grafos abaixo escreva:

1. os limitantes dados pelo Teorema de Vizing;
2. os limitantes dados pelo Teorema de Shannon;
3. o índice cromático e uma coloração das arestas.



Teorema 18.15 (König). *Sejam $G(V, A)$ um grafo bipartido e $\Delta = \max\{d(v) : v \in V\}$. Então $\chi'(G) = \Delta$.*

Demonstração. Vamos proceder por indução no número de arestas. Seja $G(V_1 \cup V_2, A)$ um grafo bipartido com m arestas. Se $m = 1$, temos, claramente, $\Delta = \chi'(G) = 1$.

Suponha que o resultado é verdadeiro para grafos bipartidos com menos do que $m > 1$ arestas. Seja $e = (v, w) \in A$, $v \in V_1$, $w \in V_2$, e considere o grafo $H = G - e$, que possui menos do que m arestas e grau máximo menor ou igual a Δ . Segue da hipótese de indução que $\chi'(H) \leq \Delta$. Note que, em H , $d(v), d(w) \leq \Delta - 1$. Deste modo, em ambos os vértices v e w deve estar faltando ao menos uma das (no máximo) Δ cores usadas na coloração de H .



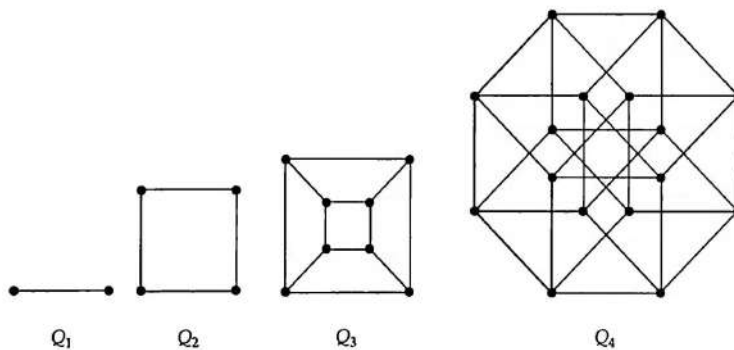
Se a cor que está faltando em v for a mesma que está faltando em w , usamos esta cor para colorir a aresta removida e . Assim, obtemos uma coloração de arestas para G com Δ cores.

Suponha que estas cores são diferentes, digamos, azul em v e vermelho em w . Considere o conjunto C dos vértices de H que podem ser alcançados a partir de v por um caminho formado inteiramente por arestas vermelhas e azuis. É claro que em tal caminho, a primeira aresta é vermelha (pois a cor azul está faltando em v) e as arestas possuem cores alternadas, sendo as arestas vermelhas de V_1 para V_2 e as azuis de V_2 para V_1 (aqui estamos usando a hipótese de G e, conseqüentemente, H serem bipartidos). Então $w \notin C$, pois a cor vermelha (das arestas de V_1 para V_2) está faltando em w . Podemos inverter as cores neste caminho (arestas vermelhas passam a ser azuis e vice-versa) sem prejuízo da coloração das arestas de H . Agora a cor vermelha está faltando em ambos os vértices v e w . A aresta $e = (v, w)$ pode ser colorida com a cor vermelho. Temos, portanto, uma coloração de G com Δ cores. \square



Exercícios. [J.M. Aldous & R. Wilson [2]]

1. Determine $\chi'(K_{p,q})$, $p \leq q$.
2. Encontre o índice cromático dos grafos k -cubos Q_k , definidos como grafos simples k -regulares com 2^k vértices.



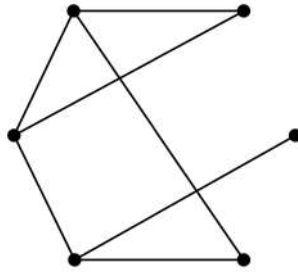
Algoritmo (guloso) para coloração de arestas [J.M. Aldous, R. Wilson [2]]

- **Inicie** com um grafo G e uma lista de cores $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$
- **Passo 1:** Faça uma rotulação das arestas de G : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$
- **Passo 2:** Identifique uma aresta não colorida de acordo com a ordem obtida no Passo 1; designe para esta aresta a primeira cor da lista de cores não usada nas arestas já coloridas que sejam adjacentes a aresta em questão
- Repita o Passo 2 até que todas as arestas sejam coloridas, então **pare**

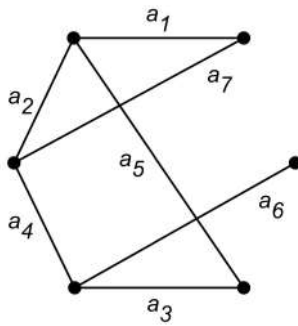
Aplicando o procedimento acima, uma coloração de G será obtida. O número de cores usadas depende da rotulação feita no Passo 1.

Ilustração 1

Vamos aplicar o algoritmo para obter uma coloração do grafo G abaixo.



Passo 1: Rotulação



Passo 2: Coloração

aresta a_1 com a cor c_1 ;

aresta a_2 com a cor c_2 ;

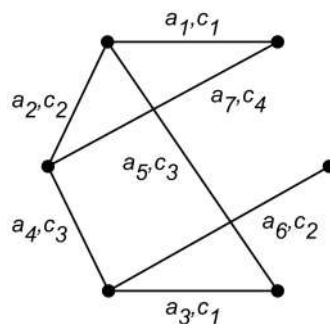
aresta a_3 com a cor c_1 ;

aresta a_4 com a cor c_3 ;

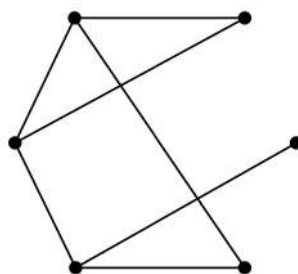
aresta a_5 com a cor c_3 ;

aresta a_6 com a cor c_2 ;

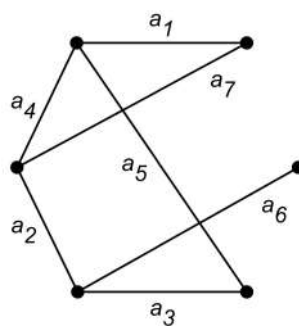
aresta a_7 com a cor c_4 .

**Ilustração 2**

Vamos aplicar o algoritmo para obter uma coloração do grafo G abaixo.



Passo 1: Rotulação



Passo 2: Coloração

aresta a_1 com a cor c_1 ;

aresta a_2 com a cor c_1 ;

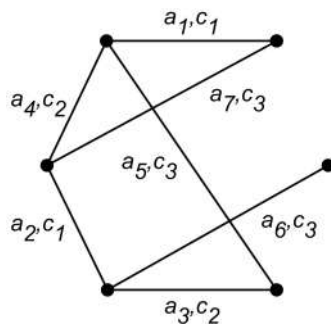
aresta a_3 com a cor c_2 ;

aresta a_4 com a cor c_2 ;

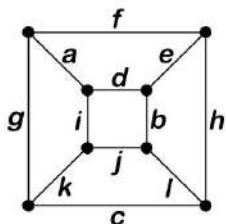
aresta a_5 com a cor c_3 ;

aresta a_6 com a cor c_3 ;

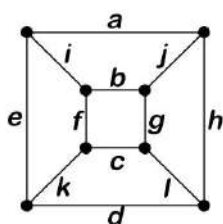
aresta a_7 com a cor c_3 .



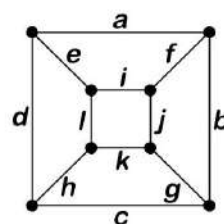
Exercício. Usar o algoritmo para colorir as arestas do seguinte grafo G , usando cada uma das rotulações dadas.



(a)



(b)



(c)

Teorema 18.16. Para todo grafo G , existe uma rotulação das arestas tal que a coloração obtida pelo algoritmo guloso usa $\chi'(G)$ cores.

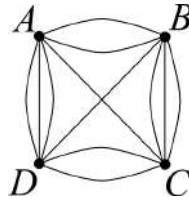
Demonstração. Considere uma coloração de G com $\chi'(G)$ cores denotadas por $c_1, c_2, \dots, c_{\chi'(G)}$. Rotule como a_1, a_2, \dots as arestas coloridas com a cor c_1 , então as arestas coloridas com a cor c_2 , e assim por diante. \square

Exercícios.

Lista baseada na referência

J.M. Aldous and R.J. Wilson *Graphs and Applications – An Introductory Approach* (vide ref. [2]).

1. Quantas cores são necessárias para colorir os fios da seguinte rede de modo que qualquer par de fios que emergem do mesmo ponto são coloridos com cores diferentes?



2. Cinco estudantes devem ser examinados por cinco professores:

professor 1 deve examinar os estudantes B e D ;

professor 2 deve examinar os estudantes A , B e E ;

professor 3 deve examinar os estudantes B , C e E ;

professor 4 deve examinar os estudantes A e C ;

professor 5 deve examinar os estudantes B , D e E .

Se cada exame demora o mesmo tempo, determine o número mínimo de períodos de exame necessários.

3. Cinco estudantes devem ser examinados por quatro professores:

professor A deve examinar os estudantes 1, 2 e 5;

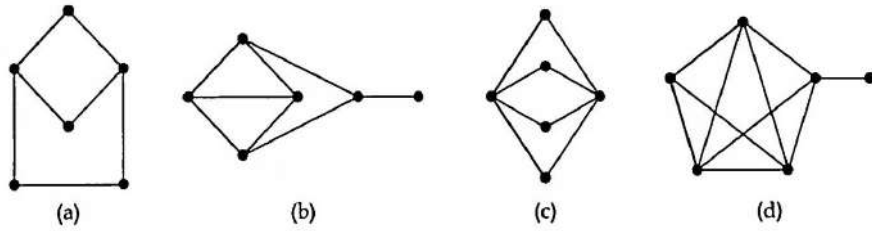
professor B deve examinar os estudantes 1, 3 e 4;

professor C deve examinar os estudantes 2, 3 e 5;

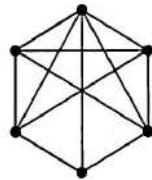
professor D deve examinar os estudantes 2, 3 e 4.

Se cada exame demora o mesmo tempo, determine o número mínimo de períodos de exame necessários. De que maneira os exames podem ser agendados?

4. Determine $\chi'(G)$ para cada um dos grafos seguintes.

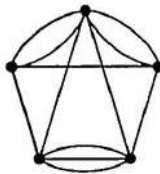


5. Considere o seguinte grafo G .



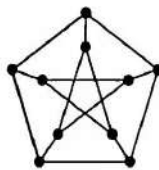
- (a) Use o Teorema de Vizing para obter os limitantes inferior e superior para $\chi'(G)$.
- (b) Qual é o valor exato de $\chi'(G)$?

6. Considere o seguinte grafo G .



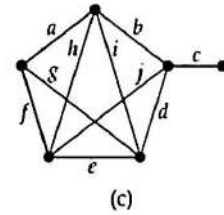
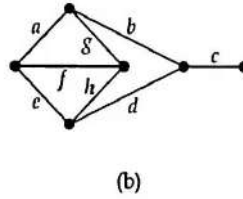
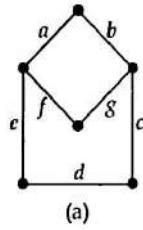
- (a) Use os Teoremas de Vizing e de Shannon para obter os limitantes inferior e superior para $\chi'(G)$.
- (b) Qual é o valor exato de $\chi'(G)$?

7. Prove que o grafo de Petersen tem índice cromático igual a 4.

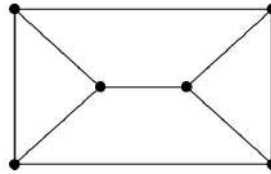


Dica: Aplique o Teorema de Vizing. Depois suponha que o índice cromático é 3, e note que essencialmente há uma única maneira de se fazer uma coloração das arestas do pentágono externo usando 3 cores.

8. Seja G um grafo Hamiltoniano 3-regular. Mostre que $\chi'(G) = 3$.
9. Use o algoritmo guloso para obter uma coloração das arestas de cada um dos seguintes grafos rotulados.



10. Encontre uma rotulação das arestas do seguinte grafo, tal que a coloração obtida pelo algoritmo guloso usa χ' cores.



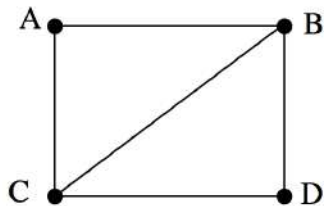
Capítulo 19

Emparelhamentos

Observe que uma coloração de arestas em um grafo G , induz uma partição no conjunto de arestas do grafo tal que cada subconjunto de arestas não possui arestas adjacentes. Tal conjunto é chamado de conjunto independente de arestas ou emparelhamento.

Definição 19.1. *Um emparelhamento (ou **matching**, ou **acoplamento**) em um grafo G é um conjunto de arestas tal que não existem duas arestas adjacentes neste conjunto. Este conjunto também é chamado de conjunto independente de arestas.*

Exemplo 19.2. *No grafo abaixo, os conjuntos $\{(B, C)\}$ e $\{(A, C), (B, D)\}$ são exemplos de emparelhamentos.*

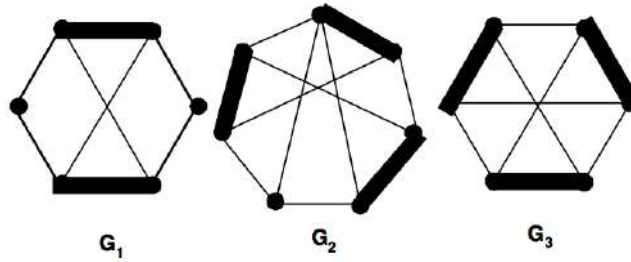


Definição 19.3. *Um emparelhamento é chamado de **emparelhamento maximal** se nenhuma aresta do grafo puder ser adicionada sem que a propriedade de não-adjacência entre as arestas seja destruída.*

Observação 19.4. *Observe que um grafo pode ter vários emparelhamentos maximais. Em geral, estamos interessados no emparelhamento maximal com o maior número possível de arestas, chamado **emparelhamento máximo**.*

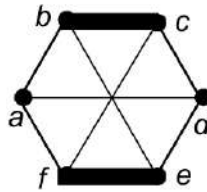
Definição 19.5. Um emparelhamento máximo é chamado de **emparelhamento perfeito** se todo vértice do grafo é extremidade de alguma aresta do emparelhamento.

Exemplo 19.6 (S. Jurkiewicz). Abaixo, em G_1 temos um emparelhamento maximal, mas não máximo; Em G_2 temos um emparelhamento máximo, mas não perfeito; em G_3 temos um emparelhamento perfeito.



Definição 19.7. Sejam G um grafo e M um emparelhamento em G . Um caminho em G unindo dois vértices não saturados por M que alterna entre arestas de $A(G) \setminus M$ e M é chamado **caminho M -aumentador**.

Exemplo 19.8. O caminho $\{a, (a, b), b, (b, c), c, (c, d), d\}$ é M -aumentador:



Observação 19.9. Note que incluindo as arestas do caminho fora de M ao emparelhamento e retirando as arestas em M do emparelhamento, obtemos um novo emparelhamento com uma aresta a mais.

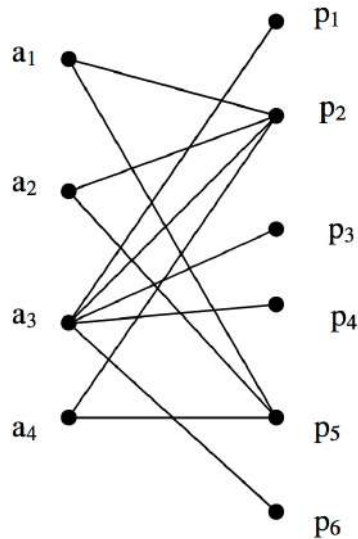
Teorema 19.10 (Berge). Um emparelhamento M de um grafo G é máximo se, e somente se, não contém um caminho M -aumentador.

Demonstração. Ver S. Jurkiewicz [14] ou D.B. West [24]. □

19.1 Emparelhamentos em Grafos Bipartidos

Suponha que existam 4 pessoas, a_1, a_2, a_3 e a_4 disponíveis para preencher 6 funções vagas, p_1, \dots, p_6 . As pessoas a_1, a_2 e a_4 são qualificadas para exercer a função p_2 ou p_5 . A pessoa a_3 é qualificada para exercer a função p_1, p_2, p_3, p_4 ou p_6 . A questão é: Será possível empregar todas as pessoas de tal forma que cada pessoa desempenhe a função para a qual esta qualificada? Se a resposta é não, qual é o maior número de vagas que podem ser preenchidas? Como representar este problema através de um grafo?

- Vértices: pessoas e funções vagas;
- Arestas: existe uma aresta ligando uma pessoa às funções para as quais ela esta habilitada.

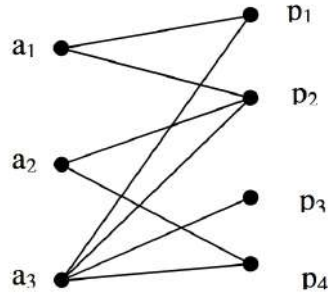


No grafo acima temos os seguintes emparelhamentos: $\{(a_1, p_2), (a_2, p_5)\}$, $\{(a_4, p_1)\}$ e $\{(a_1, p_2), (a_3, p_1), (a_4, p_5)\}$.

Emparelhamentos estão definidos para qualquer tipo de grafo, mas são estudados mais amplamente no contexto de grafos bipartidos.

Definição 19.11. *Seja um grafo bipartido $G(V, A)$ tal que $V = V_1 \cup V_2$. Um **emparelhamento completo** entre os vértices do conjunto V_1 e os vértices do conjunto V_2 é um emparelhamento no qual existe uma aresta incidente em cada vértice de V_1 .*

Exemplo 19.12. $\{(a_1, p_2), (a_2, p_4), (a_3, p_1)\}$ é um emparelhamento completo. Ou seja, um emparelhamento completo (se existir) é o maior emparelhamento maximal, o contrário não é verdade.



Questão: Quais são as condições necessárias para existência de um emparelhamento completo?

1. Número de vértices em V_2 maior ou igual número de vértices em V_1 .

► É suficiente?

Não, no exemplo inicial esta condição é satisfeita e no entanto não existe um emparelhamento completo. Das 4 pessoas, 3 (a_1 , a_2 e a_4) estão qualificadas para as mesmas funções (p_1 e p_5) e portanto uma das pessoas não poderá preencher nenhuma vaga.

2. Qualquer subconjunto de r vértices de V_1 tem que ser coletivamente adjacente a pelo menos r vértices em V_2 , $r = 1, 2, \dots, |V_1|$.

► Esta condição não é satisfeita no grafo do problema das vagas pois o subconjunto de três vértices $\{a_1, a_2, a_4\}$ é adjacente a apenas 2 vértices, $\{p_2, p_5\}$.

★ Esta condição é também suficiente!

Teorema 19.13 (Condição de Hall). *Existe um emparelhamento completo entre V_1 e V_2 em um grafo bipartido se, e somente se, todo subconjunto de r vértices em V_1 é coletivamente adjacente a r ou mais vértices em V_2 , para $r = 1, 2, \dots, |V_1|$.*

Uma demonstração pode ser encontrada em O. Ore [19]. Vamos apresentar uma outra demonstração dada em R.J. Wilson [25], obtida por meio do Teorema de Menger. Para isso, vamos relembrar alguns conceitos e o próprio Teorema de Menger.

Sejam $G(V, A)$ um grafo conexo e $v, w \in V$ vértices distintos. Um subconjunto $E \subset A$ é dito ser vw -desconectador em G se todo caminho de v a w possui uma aresta de E . Um subconjunto $S \subset V \setminus \{v, w\}$ é dito ser vw -separador em G se todo caminho de v a w passa por um vértice de S . Note que um conjunto vw -desconectador é um corte de arestas e um conjunto vw -separador é um corte de vértices.

Teorema 19.14 (Teorema de Menger – Versão para arestas). *Sejam $G(V, A)$ um grafo conexo e $v, w \in V$ vértices distintos. O número máximo de caminhos aresta-disjuntos de v a w é igual ao número mínimo de arestas em um conjunto vw -desconectador em G .*

Teorema 19.15 (Teorema de Menger – Versão para vértices). *Sejam $G(V, A)$ um grafo conexo e $v, w \in V$ vértices distintos. O número máximo de caminhos vértices-disjuntos de v a w é igual ao número mínimo de vértices em um conjunto vw -separador em G .*

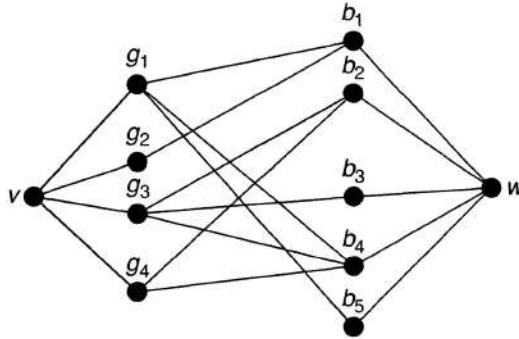
Teorema 19.16. *O Teorema de Menger implica o Teorema de Hall.*

Demonstração. Seja $G(V, A)$ um grafo bipartido com $V = V_1 \cup V_2$. Temos que mostrar que G possui um emparelhamento completo de V_1 para V_2 se, e somente se, $|S| \leq |N(S)|^1$ para todo $S \subset V_1$.

[\Rightarrow] Se G possui um emparelhamento completo de V_1 para V_2 então, conforme já vimos, necessariamente, $|S| \leq |N(S)|$ para todo $S \subset V_1$.

[\Leftarrow] Suponha que $|S| \leq |N(S)|$ para todo $S \subset V_1$. Considere o grafo H obtido de G adicionando-se um vértice v adjacente a todo vértice em V_1 e um vértice w adjacente a todo vértice em V_2 .

¹ $N(S)$ denota o conjunto dos “vizinhos” de S , isto é, os vértices que são adjacentes aos vértices em S .

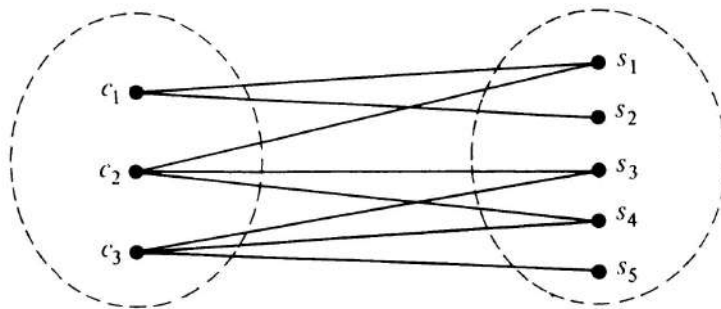


Note que existe um emparelhamento completo de V_1 para V_2 se, e somente se, o número de caminhos vértice-disjuntos de v a w em H é igual a $|V_1|$. Sendo assim, pelo Teorema de Menger (para vértices), é suficiente mostrar que todo conjunto vw -separador possui ao menos $|V_1|$ vértices. Seja C um conjunto vw -separador. Se $C = V_1$, não há o que provar. Se $C = V_2$, como $|V_2| = |N_G(V_1)| \geq |V_1|$, também não há o que provar. Sejam $A = C \cap V_1 \neq \emptyset$ e $B = C \cap V_2 \neq \emptyset$. Como $C = A \cup B$ é um conjunto vw -separador, não existem arestas de $V_1 \setminus A$ para $V_2 \setminus B$, de modo que $N(V_1 \setminus A) \subset B$. Temos que $|V_1 \setminus A| \leq |N(V_1 \setminus A)| \leq |B|$. Daí, $|C| = |A| + |B| \geq |A| + |V_1 \setminus A| = |V_1|$. \square

Observação 19.17. O resultado acima é muito importante, porém se o grafo é grande torna-se impraticável a verificação da condição imposta uma vez que teríamos que examinar 2^{n_1-1} subconjuntos de V_1 , considerando que existem n_1 vértices em V_1 .

Aplicação 1 (N. Deo [8])

Cinco senadores s_1, s_2, s_3, s_4 e s_5 são membros de três comitês, c_1, c_2 e c_3 , conforme a figura abaixo:



Um membro de cada comitê deve ser escolhido para representar o seu comitê em um super-comitê. É possível enviar um representante distinto de cada comitê? Estamos procurando um emparelhamento completo no grafo acima. Aplicando o teorema anterior, obtemos:

	V_1	V_2
$r = 1$	$\{c_1\}$	$\{s_1, s_2\}$
	$\{c_2\}$	$\{s_1, s_3, s_4\}$
	$\{c_3\}$	$\{s_3, s_4, s_5\}$
$r = 2$	$\{c_1, c_2\}$	$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
	$\{c_2, c_3\}$	$\{s_1, s_3, s_4, s_5\}$
	$\{c_3, c_1\}$	$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$
$r = 3$	$\{c_1, c_2, c_3\}$	$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

Logo, a condição necessária e suficiente do teorema é verificada. Portanto existe um emparelhamento completo. Por exemplo,

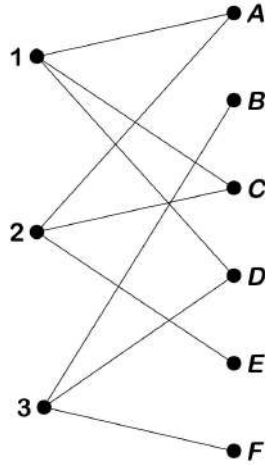
$$\{(c_1, s_1), (c_2, s_3), (c_3, s_4)\}.$$

Aplicação 2 (S. Jurkiewicz [14])

Uma aplicação conhecida da coloração de arestas é o problema dos exames orais. Três professores devem examinar 6 estudantes, segundo a seguinte lista:

Professor	Aluno
1	A, C, D
2	A, C, E
3	B, D, F

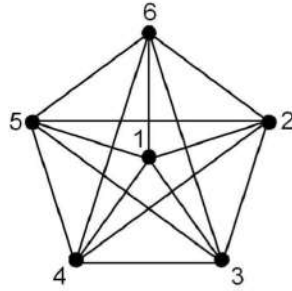
A cada hora um professor chama um dos alunos para ser examinado. Dois professores não podem examinar um aluno e cada professor examina apenas um aluno. Qual o menor espaço de tempo que podemos utilizar? Usaremos um modelo de grafo bipartido: de um lado os professores, do outro os alunos.



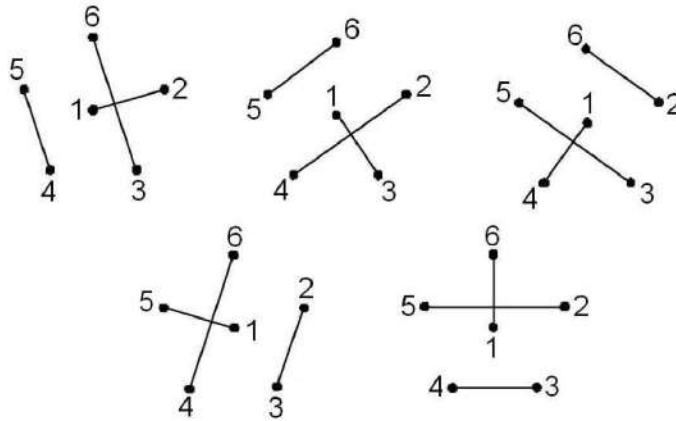
Uma coloração das arestas representa uma divisão de horários. A coloração $\{(1, A), (2, C), (3, D)\}, \{(1, C), (2, A), (3, B)\}, \{(1, D), (2, E), (3, F)\}$, é uma partição das arestas em emparelhamentos disjuntos, o que é garantido pelo Teorema de Hönlig.

Aplicação 3 (S. Jurkiewicz [14])

Outro problema clássico da coloração de arestas é a organização de passeios por duplas. Suponha que um batalhão com $2t$ soldados sai para marchar todo dia. Quantos passeios podemos fazer de modo que cada soldado tenha sempre um companheiro diferente? Este número é, no máximo, $2t - 1$, pois este é o número de companheiros que cada soldado tem. Veremos que este é o número exato. Para melhor enxergar este fato vamos dar o exemplo com $t = 3$, isto é, com 6 soldados. Se pensarmos em todas as duplas possíveis estamos pensando no grafo K_6 , os soldados sendo os vértices e as arestas as duplas. Um passeio corresponderá a um acoplamento perfeito e uma coloração das arestas usando acoplamentos perfeitos nos dará o número possível de passeios. Desenhamos K_6 da seguinte forma:



Os emparelhamentos são obtidos pelas arestas paralelas e perpendiculares:



A coloração produzida é: $\{(1, 2), (3, 6), (4, 5)\}, \{(1, 3), (2, 4), (5, 6)\}, \{(1, 4), (2, 6), (3, 5)\}, \{(1, 5), (2, 3), (4, 6)\}, \{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$.

Corolário 19.18. *Seja k um inteiro positivo. Todo grafo bipartido k -regular possui um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Seja $G(V, A)$ um grafo bipartido k -regular, onde $V = V_1 \cup V_2$. Cada aresta de G possui uma extremidade em V_1 e outra em V_2 . Há $k|V_1|$ arestas partindo de V_1 e $k|V_2|$ arestas chegando em V_2 . Logo, $k|V_1| = k|V_2|$, ou seja, $|V_1| = |V_2|$. Agora é suficiente mostrar que G possui um emparelhamento completo de V_1 em V_2 . Usaremos a Condição de Hall.

Considere um subconjunto $S \subset V_1$ com r vértices e l arestas, e $N(S)$ o subconjunto de vértices de V_2 aos quais os vértices de S são coletivamente adjacentes. Como G é k -regular, $l = k|S| = kr$. Por outro lado, $l \leq k|N(S)|$. Logo, $k|S| \leq k|N(S)|$, de onde $r = |S| \leq$

$|N(S)|$, isto é, os r vértices em S são coletivamente adjacentes a r ou mais vértices em V_2 . \square

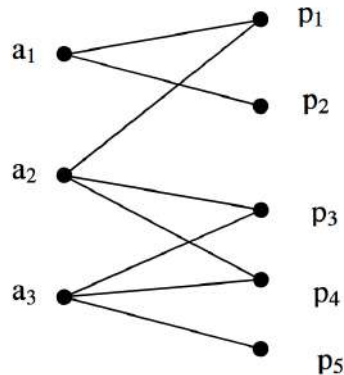
O teorema a seguir fornece uma condição suficiente para determinar a existência de emparelhamentos completos (note que a condição não é necessária).

Teorema 19.19. *Existe um emparelhamento completo entre V_1 e V_2 em um grafo bipartido se existe um número positivo k que satisfaz*

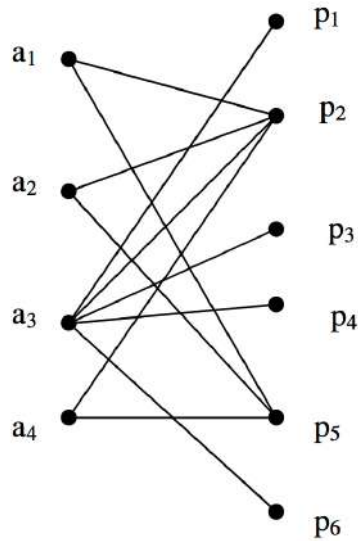
$$d(v) \geq k \geq d(w) \quad \forall v \in V_1, \quad \forall w \in V_2.$$

Demonstração. Considere um subconjunto $S \subset V_1$ com r vértices. Por hipótese, $d(v) \geq k$ para todo $v \in S$. Daí, existem no mínimo kr arestas incidentes em S . Como $d(w) \leq k$ para todo $w \in V_2$, estas arestas incidem em pelo menos r vértices em V_2 . Deste modo, todo subconjunto de r vértices em V_1 é coletivamente adjacente a r ou mais vértices em V_2 , para $r = 1, 2, \dots, |V_1|$. Segue da Condição de Hall que existe um emparelhamento completo entre V_1 e V_2 . \square

Exemplo 19.20. *No grafo da figura a seguir temos que $d(v_i) \geq 2 \geq d(v_j) \quad \forall v_i \in V_1, \quad \forall v_j \in V_2$.*



No grafo abaixo temos que $d(a_2) = 2$, $a_2 \in V_1$, e $d(p_2) = 4$, $p_2 \in V_2$. Isto é, a condição do teorema anterior não é satisfeita.

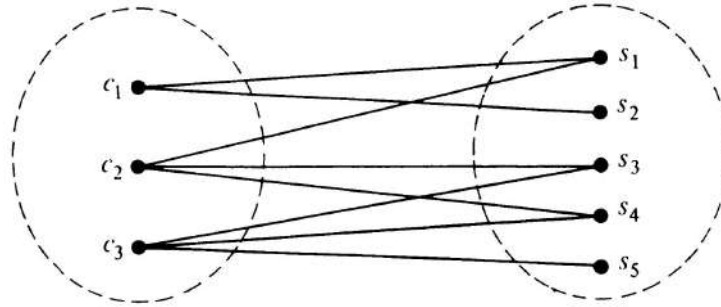


Exercício. Encontre um grafo bipartido que não satisfaz a condição do teorema, mas possui um emparelhamento completo.

O teorema ajuda a responder à primeira questão do problema das vagas. O que fazer quando não existe um emparelhamento completo? Como encontrar um emparelhamento maximal? Para isso precisamos definir a deficiência de um grafo bipartido, isto é, o número de vértices que não são cobertos por um emparelhamento máximo.

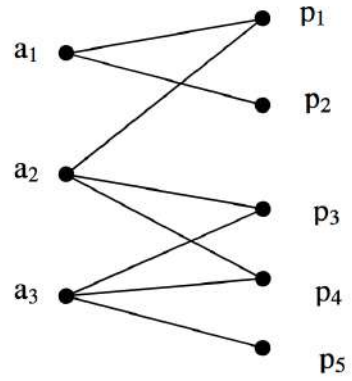
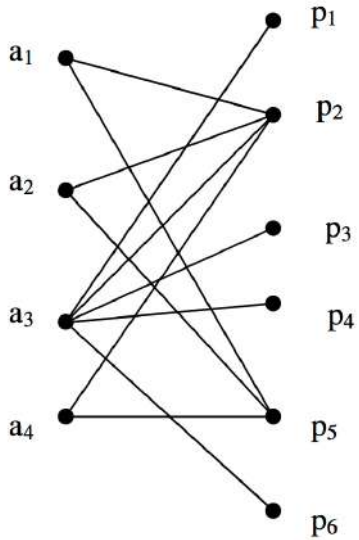
Definição 19.21. Dado um grafo bipartido, considere que um conjunto de r vértices em V_1 é coletivamente adjacente a q vértices em V_2 . Então a **deficiência** do grafo bipartido, denotada por $\gamma(G)$, é dada pelo valor máximo da diferença $r - q$ tomado para todos os valores de r , desde $r = 1$ até $r = |V_1|$, e para todos os subconjuntos de V_1 .

Teorema 19.22. Existe emparelhamento completo em grafo bipartido se, e somente se, $\gamma(G) \leq 0$.



	V_1	V_2	$r - q$
$r = 1$	$\{c_1\}$	$\{s_1, s_2\}$	-1
	$\{c_2\}$	$\{s_1, s_3, s_4\}$	-2
	$\{c_3\}$	$\{s_3, s_4, s_5\}$	-2
$r = 2$	$\{c_1, c_2\}$	$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$	-2
	$\{c_2, c_3\}$	$\{s_1, s_3, s_4, s_5\}$	-2
$r = 3$	$\{c_3, c_1\}$	$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$	-3
	$\{c_1, c_2, c_3\}$	$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$	-2

Exercício. Calcule a deficiência dos grafos das figuras abaixo.

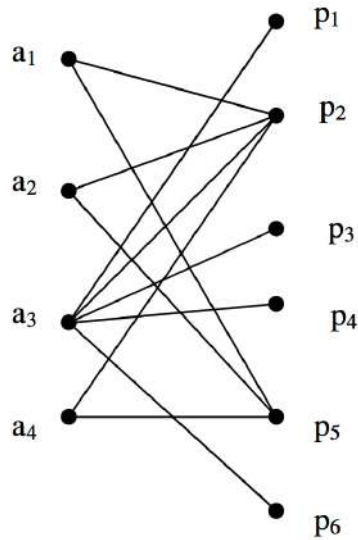


Se a deficiência for positiva, temos:

Teorema 19.23. *O número de arestas no maior emparelhamento maximal de um grafo bipartido é dado por $|V_1| - \gamma(G)$.*

Demonstração. Ver em C.L. Liu [15]. □

Exemplo 19.24. *O número de arestas no emparelhamento máximo no grafo abaixo é $|V_1| - \gamma(G) = 4 - 1 = 3$.*

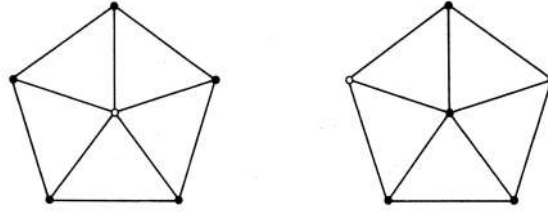


Exercício. Modele e resolva o seguinte problema da designação:

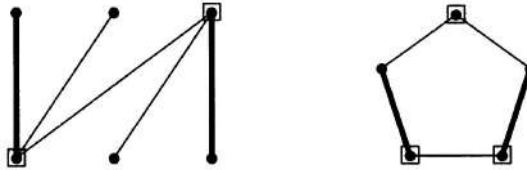
Considere um conjunto de n pessoas e n tarefas, tal que toda pessoa deve executar uma tarefa e toda tarefa deve ser executada por uma pessoa. Seja p_{ij} a eficiência com que a pessoa i executa a tarefa j . Determine uma designação das pessoas às tarefas que maximize a eficiência total.

19.2 Teorema Min-Max

Definição 19.25. *Seja $G(V, A)$ um grafo. Um subconjunto $C \subset V$ é dito ser uma **cobertura de vértices** de G se toda aresta possui ao menos uma extremidade em C . Os vértices em C “cobrem” as arestas em A . Uma cobertura de vértices com o menor número possível de vértices é chamada **cobertura mínima**.*



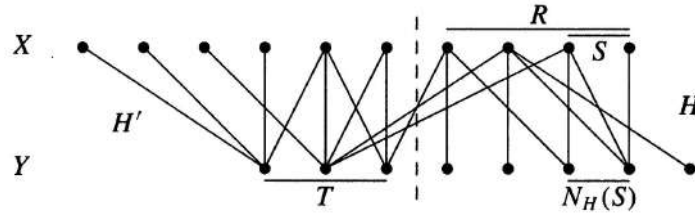
No grafo abaixo à esquerda, temos uma cobertura de vértices com dois vértices e um emparelhamento com duas arestas. A existência da cobertura com dois vértices indica que não há emparelhamentos com mais de duas arestas. Por outro lado, a existência de um emparelhamento com duas arestas indica que não há coberturas com menos de dois vértices. À direita, a diferença entre o número de vértices da cobertura e a quantidade de arestas do emparelhamento é um.



Teorema 19.26 (König, 1931). *Seja $G(V, A)$ um grafo bipartido. Então, a cardinalidade de um emparelhamento máximo de G é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima de G .*

Demonstração. Seja $G(V, A)$ um grafo bipartido em que $V = X \cup Y$. Sejam C uma cobertura mínima e E um emparelhamento máximo em G . Como um mesmo vértice não pode cobrir duas arestas não-adjacentes, cada aresta em E dever ser coberta por um vértice distinto em C , ou seja, $|E| \leq |C|$.

A fim de demonstrar a desigualdade oposta, defina $R = C \cap X$ e $T = C \cap Y$. Sejam H o subgrafo de G induzido por $R \cup (Y \setminus T)$ e H' o subgrafo de G induzido por $T \cup (X \setminus R)$. É claro que H e H' são bipartidos. Seja S um subconjunto qualquer de R e $N_H(S)$ o subconjunto de vértices adjacentes a S em H .



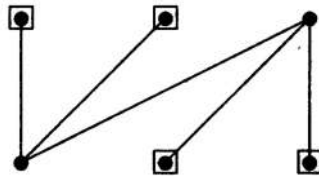
Então $(C \setminus S) \cup N_H(S)$ é uma cobertura de G , pois toda aresta que tem uma ponta em S também tem uma ponta em $N_H(S)$. Como C é uma cobertura mínima, $|C| - |S| + |N_H(S)| \geq |C|$, isto é, $|N_H(S)| \geq |S|$. Segue do Teorema de Hall que existe um emparelhamento completo F em H (de R em $Y \setminus T$). Analogamente, existe um emparelhamento completo F' em H' (de T em $X \setminus R$). É claro que $F \cup F'$ é um emparelhamento em G . Assim,

$$|E| \geq |F \cup F'| = |F| + |F'| = |R| + |T| = |C|.$$

□

19.3 Conjuntos Independentes e Coberturas

Relembrando, o número de independência de um grafo é a cardinalidade máxima de um conjunto independente de vértices (vértices não-adjacentes dois a dois). O número de independência de um grafo bipartido nem sempre é igual ao número de vértices dos conjuntos da (bi)partição.



Relembrando, uma cobertura de arestas em um grafo é um subconjunto de arestas que “cobre” todos os vértices do grafo. No exemplo acima, as quatro arestas incidentes nos vértices marcados formam uma cobertura de arestas.

Observação 19.27. • *Nenhum vértice cobre duas arestas em um emparelhamento.*

- *Do mesmo modo, nenhuma aresta contém dois vértices de um conjunto independente.*
- *Somente grafos sem vértices isolados possuem coberturas de arestas.*
- *Um emparelhamento perfeito forma uma cobertura de arestas com $n/2$ arestas.*
- *Normalmente, pode-se obter uma cobertura de arestas adicionando-se arestas a um emparelhamento máximo.*

Notações: Seja $G(V, A)$ um grafo.

- Cardinalidade de conjuntos independentes máximos: $\alpha(G)$;
- Cardinalidade de emparelhamentos máximos: $\alpha'(G)$;
- Cardinalidade de coberturas de vértices mínimas: $\beta(G)$;
- Cardinalidade de coberturas de arestas mínimas: $\beta'(G)$.

Observação 19.28. *Sabemos do Teorema de König que $\alpha'(G) = \beta(G)$ para grafos bipartidos. Como nenhuma aresta pode cobrir dois vértices em um conjunto independente, $\alpha(G) \leq \beta'(G)$. Veremos que $\alpha(G) = \beta'(G)$ para grafos bipartidos que não possuem vértices isolados.*

Lema 19.29. *Sejam $G(V, A)$ um grafo e $S \subset V$. Então S é um conjunto independente se, e somente se, $V \setminus S$ é uma cobertura de vértices. Além disso, $\alpha(G) + \beta(G) = |V|$.*

Demonstração. Se S é um conjunto independente, então toda aresta é incidente a ao menos um vértice em $V \setminus S$. Se $V \setminus S$ cobre todas as arestas, não há arestas unindo vértices em S . Consequentemente, todo conjunto independente máximo é o complemento de uma cobertura de vértices mínima. Assim, $\alpha(G) + \beta(G) = |V|$. \square

Teorema 19.30 (Gallai, 1959). *Sejam $G(V, A)$ um grafo sem vértices isolados. Então, $\alpha'(G) + \beta'(G) = |V|$.*

Demonstração. Ver D.B. West [24]. \square

Corolário 19.31. *Sejam $G(V, A)$ um grafo bipartido sem vértices isolados. Então, $\alpha(G) = \beta'(G)$.*

Demonstração. Segue do lema e do teorema anteriores que

$$\alpha(G) + \beta(G) = \alpha'(G) + \beta'(G).$$

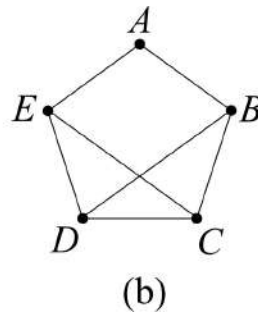
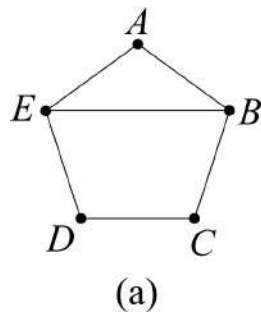
Sabemos do Teorema de König que $\alpha'(G) = \beta(G)$. Logo, $\alpha(G) = \beta'(G)$. \square

Exercícios.

Lista baseada na referência

R.J. Wilson and J.J. Watkins, *Graphs – An Introductory approach*, J. Wiley, 1990.

1. Cinco alunos devem fazer exames orais com três professores (A , B e C) na mesma manhã. O professor A examinará os alunos 1, 2 e 4; O professor B examinará os alunos 1, 3, 4 e 5; e o professor C examinará os alunos 2, 3 e 5. Determine um horário para realização dos exames através da decomposição do grafo bipartido associado ao problema em um número mínimo de emparelhamentos.
2. Encontre um grafo bipartido $G(V, A)$, $V = V_1 \cup V_2$, tal que G possui um emparelhamento completo e não satisfaz a condição $d(v_i) \geq m \geq d(v_j) \forall v_i \in V_1, \forall v_j \in V_2$.
3. Seja G um grafo cujo maior grau (de vértices) é k . O que pode ser dito sobre o número de emparelhamentos necessários para decompor G ?
4. Quantos emparelhamentos são necessários para decompor cada um dos seguintes grafos?

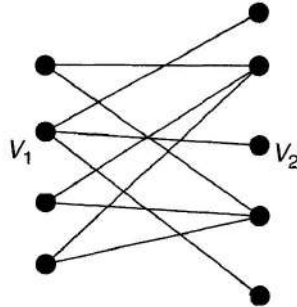


5. Cinco estudantes agendaram monitorias separadas na mesma manhã com três monitores: A , B e C . O monitor A irá atender os estudantes 1, 2 e 4; o monitor B atenderá os estudantes 1, 3, 4 e 5; e o monitor C vai atender os estudantes 2, 3 e 5. Encontre uma decomposição de arestas do grafo bipartido correspondente em emparelhamentos e obtenha um horário adequado para as monitorias.

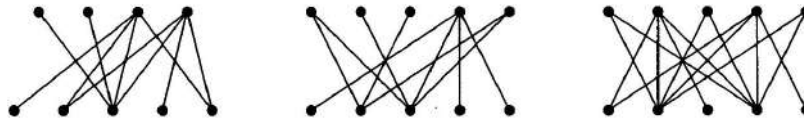
6. Suponha que três rapazes a, b, c conhecem quatro moças w, x, y, z , sendo que o rapaz a conhece as moças w, y, z , o rapaz b conhece as moças x, z e o rapaz c conhece as moças x, y .
 - (a) Desenhe um grafo bipartido que represente a situação descrita acima.
 - (b) Considerando que as moças devem se casar com rapazes que elas conheçam, encontre cinco soluções diferentes para este “problema do casamento”.
 - (c) Verifique a Condição de Hall para este problema.

7. Um empregador anuncia um pedreiro, um carpinteiro, um encanador e um fabricante de ferramentas, e recebe cinco candidatos: um para o trabalho de pedreiro, um para carpinteiro, um para pedreiro e encanador, e dois para encanador e fabricante de ferramentas.
 - (a) Desenhe o grafo bipartido correspondente.
 - (b) Verifique se a Condição de Hall é válida para este problema. Todos os empregos podem ser preenchidos por pessoas qualificadas?

8. Explique porque o grafo a seguir não possui emparelhamento completo de V_1 para V_2 .

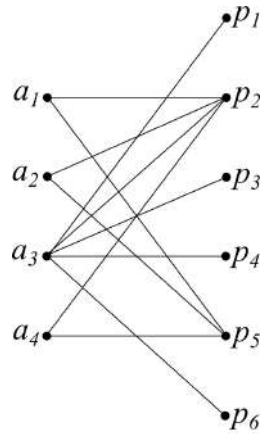


9. (O “problema do harém”) Seja B um conjunto de rapazes. Suponha que cada rapaz em B deseja casar-se com mais de uma das amigas de sua namorada. Encontre uma condição necessária e suficiente para que o problema do harém possua solução. (Sugestão: substitua cada rapaz por uma cópia idêntica dele mesmo, e depois use o Teorema de Hall.)
10. Encontre um emparelhamento máximo em cada grafo abaixo.

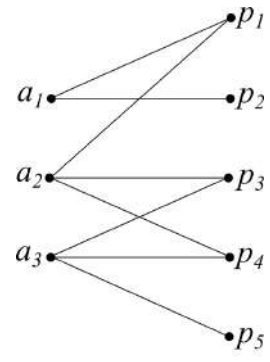


11. Determine o tamanho mínimo de um emparelhamento máximo no ciclo C_n .
12. Seja S o conjunto de vértices saturados por um emparelhamento M em um grafo G . Prove que algum emparelhamento máximo também satura todo S . A afirmação deve ser verdadeira para cada emparelhamento máximo?
13. Para cada um dos parâmetros α , α' , β , β' , caracterize os grafos simples para os quais o valor do parâmetro é 1.
14. Prove que $\alpha(G) \geq \frac{n(G)}{\Delta(G)+1}$ para cada grafo G , onde $n(G)$ é o número de vértices de G e $\Delta(G)$ é o grau máximo dos vértices de G .
15. Seja T uma árvore com n vértices, e seja k o tamanho máximo de um conjunto independente em T . Determine $\alpha'(T)$ em termos de n e k .

16. Prove que um grafo G é bipartido se, e somente se, $\alpha(H) = \beta'(H)$ para cada subgrafo H de G sem vértices isolados.
17. Calcule a deficiência dos grafos abaixo:



(a)



(b)

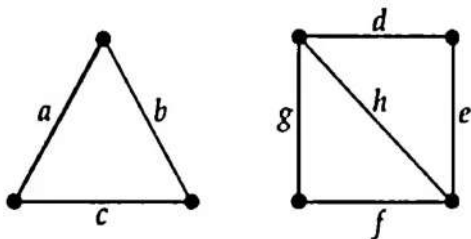
Capítulo 20

Decomposições de Arestas

Este capítulo foi baseado na referência Aldous e Wilson [2].

Alguns dos problemas mais interessantes na teoria dos grafos envolvem a decomposição de um grafo G em subgrafos de um tipo específico. Em vários desses problemas, dividimos o conjunto de arestas de G em subconjuntos disjuntos. Isso é chamado decomposição de arestas de G .

Exemplo 20.1. *Por exemplo, considere o seguinte grafo desconexo G .*

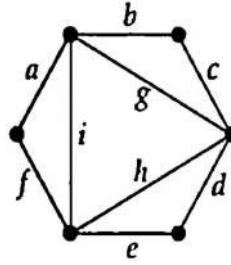


Uma decomposição de arestas natural é dividir o conjunto de arestas em subconjuntos disjuntos que correspondem aos componentes de G :

$$\{a, b, c\}, \{d, e, f, g, h\}.$$

Outra decomposição de arestas natural surge da ideia de um grafo Euleriano. Investigamos as condições em que um dado grafo conexo é Euleriano. Vimos que todo grafo Euleriano pode ser dividido em ciclos disjuntos - isso significa que podemos dividir o conjunto de arestas de G em subconjuntos disjuntos.

Exemplo 20.2. *Por exemplo, para o grafo Euleriano G mostrado abaixo, há cinco decomposições de arestas de G em ciclos disjuntos:*

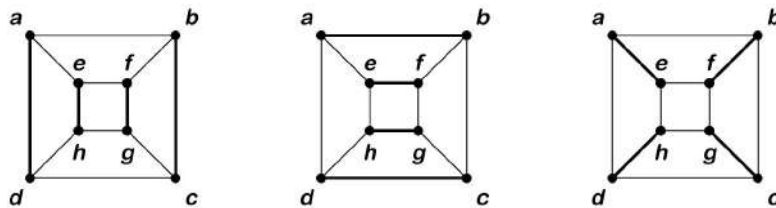


$$\begin{aligned} & \{a, b, c, d, e, f\}, \{g, h, i\}; \\ & \{a, f, i\}, \{b, c, g\}, \{d, e, h\}; \\ & \{a, f, h, g\}, \{b, c, d, e, i\}; \\ & \{b, c, h, i\}, \{a, f, e, d, g\}; \\ & \{d, e, i, g\}, \{a, b, c, h, f\}. \end{aligned}$$

Neste capítulo, adotamos uma abordagem semelhante a vários outros problemas. Cada problema pode ser formulado em termos de teoria dos grafos e envolve a divisão o conjunto de arestas de um grafo em subconjuntos disjuntos com propriedades específicas. Fazendo isso, observamos semelhanças entre problemas aparentemente diferentes e podemos começar a classificá-los, obtendo assim informações sobre a natureza do diferentes tipos de problemas.

20.1 Decomposição em Emparelhamentos

O diagrama a seguir mostra o grafo cubo e três conjuntos de arestas indicados pelas linhas em negrito.



Esses três conjuntos têm a propriedade que cada aresta do grafo aparece em apenas um deles, e isso leva à seguinte decomposição de arestas:

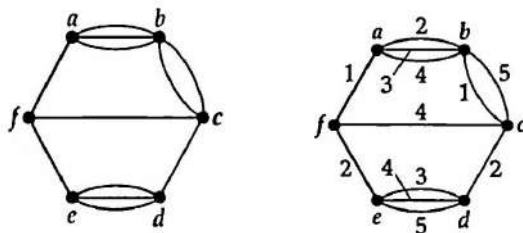
$$\begin{aligned} & \{(a, b), (c, d), (e, f), (g, h)\}, \{(a, d), (b, c), (e, h), (f, g)\}, \\ & \{(a, e), (b, f), (c, g), (d, h)\}. \end{aligned}$$

Cada um dos conjuntos acima consiste em arestas que não têm vértices em comum, ou seja, são emparelhamentos.

Todo grafo pode ser decomposto em emparelhamentos, pois se houver m arestas, então podemos simplesmente tomar m emparelhamentos, cada uma consistindo de uma única aresta. No entanto, o problema de determinar o número mínimo de emparelhamentos necessários para decompor um determinado grafo pode ser muito mais difícil, e não é resolvido em geral. Esta questão vai além interesse acadêmico, e aparece em vários contextos, um dos quais consideramos abaixo. Observe que o problema de decompor um grafo em um número mínimo de emparelhamentos é um problema de coloração de arestas.

Exemplo 20.3 (Coloração de fios). *Um engenheiro deseja construir um painel em que componentes elétricos a, b, \dots devem ser montados e depois interligados. Os fios de conexão são primeiro reunidos em um cabo, com os fios a serem conectados a a emergindo através de um buraco no painel, aqueles conectados a b emergindo através de outro buraco, e assim por diante. Para distinguir os fios que emergem do mesmo buraco, eles são coloridos com cores diferentes. Qual é o número mínimo de cores necessário para todo o sistema? (Este problema foi posto por C. E. Shannon em 1949, em um artigo sobre redes elétricas.) Para determinar o número mínimo de cores necessárias para o sistema inteiro, representamos os pontos de conexão pelos vértices de um grafo e os fios pelas arestas.*

Por exemplo, o seguinte grafo representa um painel com seis componentes, a, \dots, f . Descobrimos que são necessárias cinco cores para colorir os fios no sistema. O diagrama ao lado mostra uma coloração.



A decomposição de arestas correspondente à coloração acima consiste nos cinco subconjuntos de arestas coloridas com cada uma das cinco

cores:

$$\{(a, f), (b, c)\}, \{(a, b), (c, d), (e, f)\}, \{(a, b), (d, e)\}, \\ \{(a, b), (c, f), (d, e)\}, \{(b, c), (d, e)\}.$$

Em um problema de coloração de fios, as arestas de cada cor formam um emparelhamento, então o problema de encontrar o menor número de cores necessárias para colorir os fios é o mesmo que determinar o número mínimo de emparelhamentos necessários para decompor o grafo. Em outras palavras, é uma decomposição de arestas do grafo em que as arestas de cada subconjunto formam um emparelhamento. Como os grafos considerados em problemas de coloração de fio costumam ter arestas múltiplas, o melhor que podemos dizer é que o número de emparelhamentos é limitado pelos limites para o índice cromático dados pela versão estendida do Teorema de Vizing e pelo Teorema de Shannon:

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + h \quad \text{e} \quad \Delta \leq \chi'(G) \leq \frac{3\Delta}{2},$$

onde Δ é o grau de vértice máximo no grafo G e h é o número máximo de arestas que unem um par de vértices. É possível encontrar grafos que alcancem qualquer um desses limites, então não podemos obter melhores resultados do que isso em geral.

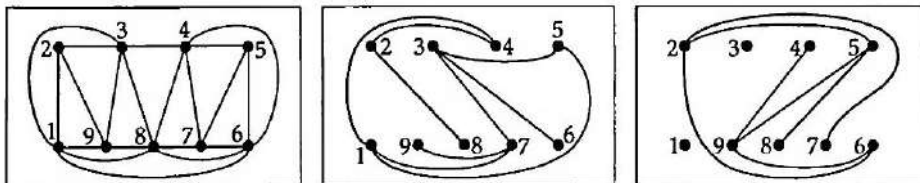
20.2 Decomposição em Subgrafos Planares

Problemas de circuitos impressos

Em circuitos impressos, componentes eletrônicos são conectados por tiras condutoras impressas diretamente sobre uma placa plana de material isolante. Esses conectores impressos podem não se cruzar, pois isso levaria a indesejáveis contatos elétricos nos pontos de cruzamento. Os circuitos em que muitos cruzamentos são inevitáveis podem ser impressos em várias placas que são então juntadas em camadas. Cada placa é composta por um circuito impresso sem cruzamentos. Qual é o menor número de tais camadas necessárias para um determinado circuito? Ilustramos esse problema com um exemplo particular.

Exemplo 20.4 (Circuitos impressos). *Considere um circuito impresso que tenha 36 interligações e seja representado pelo grafo completo K_9 .*

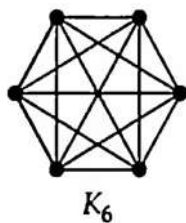
É impossível organizar todas essas interconexões em uma camada, ou mesmo duas. São necessárias três camadas, e uma solução é dada abaixo. Observe que cada uma das arestas do K_9 está incluída em apenas uma das camadas: por exemplo, a aresta $(2, 8)$ aparece na camada 2 e a aresta $(6, 9)$ aparece na camada 3.



Cada um desses três grafos é um grafo planar. Então, o problema dos circuitos impressos reduz-se à decompor o grafo em grafos menores, cada um dos quais sendo planar. Em outras palavras, é um problema de decomposição de arestas em que as arestas de cada subconjunto formam um grafo planar. No caso do K_9 , obtemos a seguinte decomposição de arestas correspondente às três camadas mostradas acima:

$$\begin{aligned} & \{(1, 2), (1, 3), (1, 6), (1, 8), (1, 9), (2, 3), (2, 9), (3, 4), (3, 8), (3, 9), \\ & \quad (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 6), (5, 7), (6, 7), (6, 8), (7, 8), (8, 9)\}, \\ & \{(1, 4), (1, 5), (1, 7), (2, 4), (2, 8), (3, 5), (3, 7), (3, 7), (7, 9)\}, \\ & \{(2, 5), (2, 6), (2, 7), (4, 9), (5, 8), (5, 9), (6, 9)\}. \end{aligned}$$

Exercício. Mostre que o K_6 pode ser “impresso” em duas camadas e escreva uma decomposição das arestas.



A ideia acima de dividir um grafo em grafos planares nos leva a definir a **espessura** de um grafo G , denotada por $t(G)$, como sendo o número mínimo de grafos planares que ao serem sobrepostos formam G . Por exemplo, a espessura de qualquer grafo planar é 1 e a espessura do grafo completo K_9 é 3.

Exercício: Determine a espessura de cada um dos seguintes grafos:

1. o grafo completo K_5 ;
2. o grafo bipartido completo $K_{3,3}$;
3. o grafo de Petersen.

Em geral, não existe uma fórmula conhecida que dê a espessura de um grafo G . No entanto, podemos obter facilmente um limitante inferior para $t(G)$ que muitas vezes coincide com o valor correto. Limitamos nossa atenção a grafos simples, já que arestas paralelas e laços não interferem na planaridade de um grafo, como vimos.

Teorema 20.5. *Seja G um grafo simples conexo com n (> 3) vértices e m arestas. Então,*

$$(a) \quad t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil;$$

$$(b) \quad t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{2n-4} \right\rceil, \text{ se } G \text{ não tiver triângulos.}$$

Demonstração. (a) Sabemos de um resultado anterior que o número de arestas em um grafo planar simples e conexo com n (> 3) vértices e m arestas é no máximo $3n - 6$. Assim, o número de arestas em cada “camada” de G é no máximo $3n - 6$. Uma vez que existem m arestas, o número de grafos planares deve ser pelo menos $m/(3n - 6)$. No entanto, o número de grafos planares é um número inteiro, então

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil.$$

(b) Similar. □

Na demonstração do resultado seguinte, vamos usar a seguinte relação:

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a}{b} + \frac{b-1}{b} \right\rfloor.$$

Teorema 20.6. (a) $t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor$;

$$(b) \quad t(K_{r,s}) \geq \left\lfloor \frac{rs}{2r+2s-4} \right\rfloor.$$

Demonstração. (a) Como $m = n(n - 1)/2$, segue do teorema anterior que

$$t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{n(n-1)/2}{3n-6} \right\rfloor.$$

Daí,

$$\begin{aligned} t(K_n) &\geq \left\lceil \frac{n(n-1)/2}{3n-6} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(n-1)/2}{3n-6} + \frac{3n-7}{3n-6} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{(n^2-n)/2 + (3n-7)}{3n-6} \right\rceil = \left\lceil \frac{(n^2-n) + (6n-14)}{2(3n-6)} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{n^2+5n-14}{2(3n-6)} \right\rceil = \left\lceil \frac{(n+7)(n-2)}{6(n-2)} \right\rceil = \left\lceil \frac{(n+7)}{6} \right\rceil. \end{aligned}$$

(b) Como $m = rs$ e $K_{r,s}$ não possui circuitos de comprimento ímpar (em particular não possui triângulos), segue do teorema anterior que

$$t(K_{r,s}) \geq \left\lceil \frac{rs}{2n-4} \right\rceil = \left\lceil \frac{rs}{2(r+s)-4} \right\rceil.$$

□

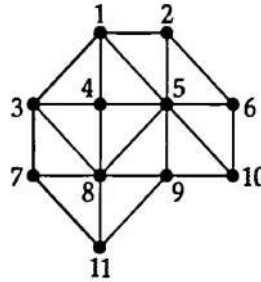
Observação 20.7. *Pode-se mostrar que $t(K_n) = \lfloor (n+7)/6 \rfloor$ para todo n , exceto para $n = 9$ e $n = 10$, quando $t(K_n) = 3$. Não se sabe se a desigualdade na parte (b) é sempre uma igualdade, mas certamente é para todos os grafos bipartidos completos com menos de 48 vértices. Então, para resumir, embora não possamos resolver o problema dos circuitos impressos em geral, obtivemos um limite inferior para a solução, e esse limite coincide com o valor correto surpreendentemente, muitas vezes.*

20.3 Decomposição em Subgrafos Geradores

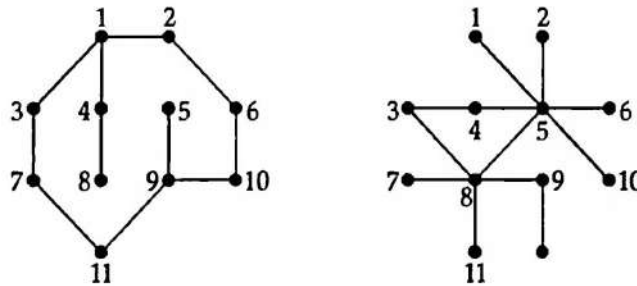
Problemas de rota de ônibus

Em uma determinada região, há uma série de empresas de ônibus concorrentes. Cada empresa deseja executar um serviço que inclua todas as cidades da região, de tal forma que os passageiros que usam essa empresa possam ir de qualquer cidade para qualquer outra cidade. No entanto, o Conselho Regional não permitirá que diferentes empresas operem ao longo do mesmo trecho de estrada. Quantas empresas podem ser acomodadas? Resolvemos esse problema desenhando um grafo cujos vértices correspondem às cidades e cujas arestas correspondem às estradas.

Exemplo 20.8 (Rotas de ônibus). *O grafo a seguir representa uma região com 11 cidades unidas por 22 estradas.*



Cada empresa de ônibus precisa de uma rede que conecte as 11 cidades, então cada empresa deve receber pelo menos 10 das estradas. Como são apenas 22 estradas, o número máximo de empresas que podem ser acomodadas é 2. O diagrama a seguir mostra uma alocação apropriada de estradas para as duas empresas.

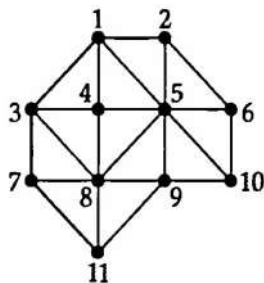


Essa alocação de estradas a empresas produz uma decomposição de arestas do grafo original. Cada subgrafo nesta decomposição deve incluir arestas incidentes a todos os vértices e devem estar conectadas, de modo que um passageiro pode viajar de qualquer cidade para qualquer outra pelos ônibus de cada empresa. Então o problema reduz-se à decompor o grafo no número máximo de subgrafos conexos, cada um dos quais inclui todos os vértices do grafo. Esses subgrafos são chamados de **subgrafos geradores**. Denotamos o número de subgrafos geradores de um grafo G por $s(G)$. Uma expressão para o número $s(G)$ foi obtida por W.T. Tutte, que provou o seguinte resultado em 1961.

Teorema 20.9. *Seja G um grafo conexo com n vértices. Então $s(G)$ é o maior número inteiro para o qual a afirmação seguinte é verdadeira:*

para cada inteiro positivo $k \leq n$, pelo menos $(k - 1)s(G)$ arestas devem ser removidas para desconectar G em k componentes.

Para ilustrar este resultado, consideramos o seguinte grafo G , para o qual $s(G) = 2$, como vimos no exemplo anterior.



Para desconectar G em:

- 2 componentes, devemos remover pelo menos 3 arestas; então $s(G) \leq 3/(2 - 1) = 3$;
- 3 componentes, devemos remover pelo menos 5 arestas; então $s(G) \leq 5/(3 - 1) = 5/2$;
- 4 componentes, devemos remover pelo menos 7 arestas; então $s(G) \leq 7/(4 - 1) = 7/3$;
- \vdots
- 11 componentes, devemos remover todas as 22 arestas; então $s(G) \leq 22/(11 - 1) = 22/10$.

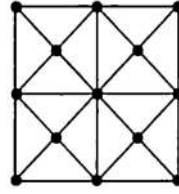
O maior inteiro $s(G)$ que satisfaz todas essas desigualdades é 2.

A prova formal do resultado acima é muito complicada para incluir aqui, mas a seguinte observação indica por que a condição é necessária.

Observação 20.10. *Suponha que o grafo G tenha sido desconectado em k componentes pela remoção de r arestas. Para ter um sistema conectado, cada empresa de ônibus deve ter pelo menos $k - 1$ arestas conectando os vários componentes. Portanto, se existirem $s(G)$ companhias de ônibus, então*

$$r \geq (k - 1)s(G).$$

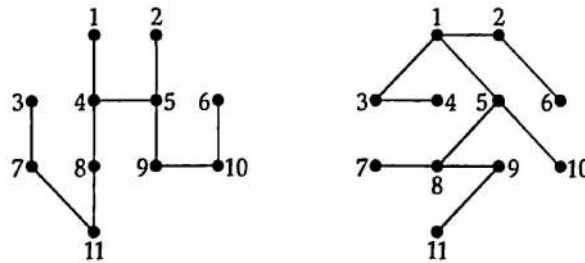
Exercício. Encontre o valor de $s(G)$ para a seguinte rede rodoviária G .



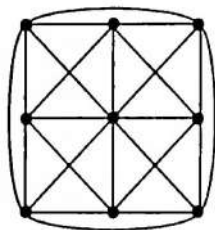
20.4 Decomposição em Árvores Geradoras

Várias variações do problema acima levam a interessantes resultados matemáticos. Por exemplo, suponha que cada empresa de ônibus atua a partir de uma garagem em uma das cidades e escolhe cada uma de suas rotas como sendo um caminho da garagem para outro vértice, retornando pelo mesmo caminho. Então, cada um dos subgrafos conexos deve ser uma árvore. Em outras palavras, o grafo pode ser decomposto em árvores geradoras. Tal decomposição é possível somente quando o número de arestas no grafo é um múltiplo do número de arestas em uma árvore geradora. Se o grafo tiver n vértices e m arestas, então m deve ser um múltiplo de $n - 1$.

Exemplo 20.11 (Rotas de ônibus - Uma variação). *No exemplo anterior, onde $n = 11$ e $m = 22$, o grafo pode ser decomposto em árvores geradoras somente se duas das estradas não forem usadas por nenhuma empresa. Por exemplo, se as estradas $(3, 8)$ e $(5, 6)$ forem removidas do grafo, o grafo resultante pode ser decomposto nas seguintes árvores geradoras.*



Exercício. Decomponha o seguinte grafo em árvores geradoras disjuntas.



O teorema seguinte dá uma condição necessária e suficiente para a existência de uma decomposição em árvores geradoras.

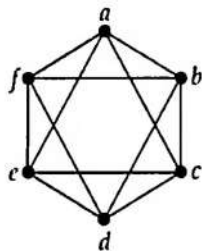
Teorema 20.12. *Seja G um grafo conexo com n vértices e $s(n - 1)$ arestas. Então, G pode ser decomposto em s árvores geradoras se, e somente se, para cada inteiro positivo $k \leq n$, pelo menos $(k - 1)s$ arestas devem ser removidas para desconectar G em k componentes.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, este teorema afirma que G pode ser decomposto em s árvores geradoras se, e somente se, $s = s(G)$. No entanto, se G pode ser decomposto em s subgrafos conexos, cada um dos quais inclui todos os vértices do grafo, então cada um desses subgrafos deve ter $n - 1$ arestas e, portanto, deve ser uma árvore geradora, uma vez que não sobram arestas para formar ciclos. \square

Observação 20.13. *Encontramos uma expressão para o número máximo de companhias de ônibus que podem ser acomodadas no primeiro tipo de problema, e obtivemos uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução para o segundo tipo de problema.*

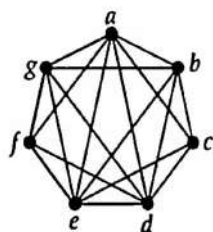
Exercícios.

1. Para o grafo octaedro mostrado abaixo, encontre uma decomposição de arestas em cada um dos seguintes casos, sempre que possível:

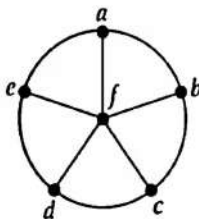


- (a) ciclos disjuntos;
 - (b) subgrafos planares;
 - (c) subconjuntos de arestas independentes (não-adjacentes);
 - (d) subgrafos conexos que incluem todos os vértices;
 - (e) árvores geradoras.
2. Mostre como o grafo completo K_7 pode ser “impresso” em duas camadas e escreva uma decomposição de arestas correspondente.
 3. Determine a espessura de cada um dos seguintes grafos:
 - (a) K_{20} ; (b) $K_{20,20}$.
 4. Determine a espessura do grafo bipartido completo $K_{10,40}$.

Dica: Para obter um limitante superior, divida $K_{10,40}$ em várias cópias do grafo planar $K_{2,40}$.
 5. Decomponha o seguinte grafo em árvores geradoras disjuntas.



6. Verifique que o Teorema 20.12 vale para o seguinte grafo:



Referências Bibliográficas

- [1] R.K. Ahuja, T. Magnanti and J.B. Orlin, Network Flows. Prentice Hall, 1993.
- [2] J.M. Aldous and R. Wilson, Graphs and Applications – An Introductory Approach. Springer, 2000.
- [3] C. Berge, The Theory of Graphs and its Applications. Wiley, 1962.
- [4] P.O. Boaventura, Grafos: teoria, modelos, algoritmos. Edgard Blucher, 2003.
- [5] J. Bondy and U. Murty, Graph Theory with Applications. Macmillan, London, 1976.
- [6] R.E. Campelo e N. Maculan, Algoritmos e Heurísticas. Editora da Universidade Federal Fluminense, 1994.
- [7] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest e C. Stein, Algoritmos: teoria e prática. Editora Campus, 2002.
- [8] N. Deo, Graph Theory with applications to engineering and computer science, 1974.
- [9] K. Devlin, Quando os computadores não bastam. O problema P versus NP. Os Problemas do Milênio. Editora Record, 2004.
- [10] A.L. Furtado, Teoria do grafos – Algoritmos. L.T.C. Editora, 1973.
- [11] M. Gagnon, Notas de aula do curso: CI065 Algoritmos e teoria dos grafos. UFPR, 2002.
- [12] M.R. Garey and D.S. Johnson, Computer Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness. W.H. Freeman Company, 1979.

- [13] E.A. Hoshino, Algoritmos Lineares para Teste de Planaridade em Grafos. Dissertação de Mestrado, UFMS.
- [14] S. Jurkiewicz, Grafos – Uma Introdução. Apostila 5, OBMEP, 2009.
- [15] C.L. Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics. McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [16] J.A. Machugh, Algorithmic Graph Theory. Prentice Hall, 1990.
- [17] G. Minty, A Simple Algorithm for Listing All the Trees of a Graph. Circuits and Systems, IEEE Transactions on Circuit Theory, Volume 12(1), 120–120, 1965.
- [18] A. Mirzaian, Algorithms Animation Workshop, York University. (Última visita maio 2015:
<http://www.cse.yorku.ca/~aaw/>;
(<http://www.cse.yorku.ca/~aaw/Wang/MaxFlowStart.htm>)
- [19] O. Ore, Theory of Graphs. AMS, 1962.
- [20] J.C. de Pina, Teste de Planaridade e seus Principais Algoritmos. IME-USP. Disponível em:
<http://www.ime.usp.br/~coelho/sh/introp.html#hopcroft:jacm-21-549>
- [21] J.L. Szwarcfiter, Grafos e Algoritmos Computacionais. Ed. Campos, 1988.
- [22] A. Shioura, A. Tamura and T. Uno, An optimal algorithm for scanning all spanning trees of undirected graphs. SIAM Journal on Computing, 26(3), 678–692, 1997.
- [23] The Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts (CMI)
(<http://www.claymath.org/millennium/>).
- [24] D.B. West, Introduction to Graph Theory. Pearson, 2001.
- [25] R.J. Wilson, Introduction to Graph Theory. Longman, 1996.
- [26] R. Wilson and J. Watkins, Graphs: An Introductory Approach. John Wiley & Sons, 1990.